



# Revista Científica UNET

República Bolivariana de Venezuela

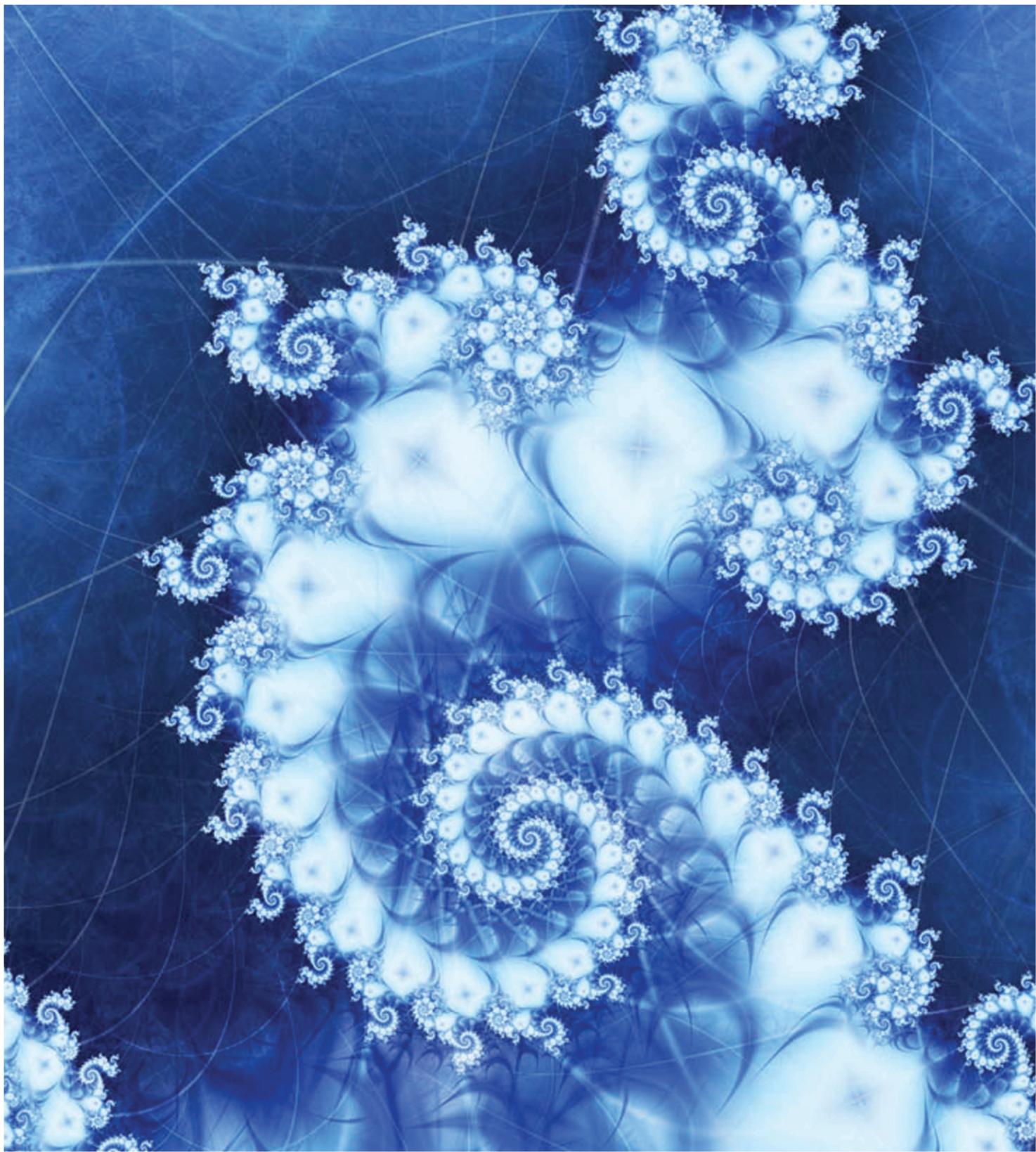
VOL. N° 21(1):2009

ENERO-JUNIO, 2009

DEPÓSITO LEGAL: P.P 87-0343  
REVENCYT: RVR 001

ISSN:1316-869X11C  
LATINDEX CATALOGO

FONACIT: REG-2006000001





## UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DEL TÁCHIRA AUTORIDADES

### RECTOR

José V. Sánchez F.

### VICERRECTOR ACADÉMICO

Carlos Chacón L.

### VICERRECTOR ADMINISTRATIVO

Doris Avendaño

### SECRETARIO

Oscar Medina H.

### COMITÉ EDITORIAL REVISTA CIENTÍFICA UNET

#### DIRECTOR

José L. Rodríguez Pérez

#### EDITOR JEFE

Gustavo Perruolo L.

### MIEMBROS COMITÉ EDITORIAL

José Luis Rodríguez

Delia Madriz

Solvey Romero

Luis Villanueva

Zuleima Valduz

Josefina Balbo

Antonio Bravo

Andrés Chacón Ortiz

### TRADUCCIÓN EN INGLES

Belkys Moncada

### DIAGRAMA Y MONTAJE

Walry Fonseca

### DISEÑO DE PORTADA

Adriana Duque

Imagen Portada: [www.fracta.art.pl](http://www.fracta.art.pl)

Revista Científica UNET

VOL. N° 21(1) : 2009



## CONSEJO DE DECANATO DE INVESTIGACIÓN

### DECANO DE INVESTIGACIÓN

José L. Rodríguez Pérez

### COORD. DE INVESTIGACIÓN AGROPECUARIA

Ana Mireya Vivas

### COORD. DE INVESTIGACIÓN INDUSTRIAL

Antonio Bravo

### COORD. DE INVESTIGACIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Mario Alayón

### COORD. DE INVESTIGACIÓN SOCIO ECONÓMICO CULTURAL

Jersus Colmenares

### REPRESENTANTE PROFESORAL

Jhon Edgar Amaya

### REPRESENTANTE PROFESORAL

María Elena Zambrano

### REPRESENTANTE PROFESORAL

Zuleima Valduz

### REPRESENTANTE ESTUDIANTIL

José Vicente García



## CONSEJO EDITORIAL FEUNET

### DIRECTOR

Salvador Villalobos

### REPRESENTANTE DEL DEC. EXTENSIÓN

Alfonso Arellano

### REPRESENTANTE DEL DEC. POSTGRADO

Mary Tahís Mogollón

### REPRESENTANTE DEL DEC. DOCENCIA

Sony Zambrano

### REPRESENTANTE DEL DEC. DE DESARROLLO ESTUDIANTIL

José Andrés Roa

# EDITORIAL

En este volumen de la Revista Científica nos complace presentar una recopilación de artículos sobre caos y complejidad. Estas teorías evidencian que el reduccionismo tan usado en la ciencia es incompleto, pues a través del estudio del individuo no es posible entender el comportamiento del colectivo. Reglas simples pueden generar comportamientos elaborados que parecen surgir de la nada, criaturas como abejas, hormigas, peces y aves, entre otras, obedecen como individuos a reglas muy simples que hacen el comportamiento de la multitud muy sofisticado. La inteligencia del enjambre por lo tanto, genera estrategias eficaces que ayudan a algunas criaturas a sobrevivir con un mínimo de organización.

La vida transcurre en una tensión entre el orden y el caos. Si hay demasiado orden, no hay sitio para la creatividad. Si hay demasiado caos nada durará el tiempo suficiente para crear algo útil. Entre ellos se encuentra el borde del caos, punto donde hay suficiente caos para la novedad, pero también amplios espacios de orden para la estabilidad de los patrones. Más allá del borde del caos, la teoría de catástrofes, explica cómo un sistema complejo se bifurca; existen valores críticos para los cuales el sistema toma el doble del tiempo para volver a un patrón estable, después de varios ciclos de duplicación del periodo se observa que el sistema llega a ser imprevisible, lo que lo obligará a organizarse a un nuevo nivel de complejidad o a que se destruya, fenómeno que explica los ataques cardíacos. Otros conceptos usados en complejidad son los fractales o patrones básicos auto-similares que se repiten dentro de sí mismos y repetidamente dentro de un sistema. El efecto mariposa, donde cambios muy pequeños en las condiciones iniciales de un sistema complejo pueden alterar drásticamente la salida final.

Estas teorías también revelan el balance que debe existir entre una serie de conductas que regulan el comportamiento individual y social, tales como autonomía y conectividad, autonomía es la necesidad de un individuo de mantenerse y determinar sus propias acciones; sin embargo no se puede sobrevivir solo siendo autónomos, pues no se vive separado del ambiente circundante. En consecuencia, conectividad con otros es tan importante como autonomía, pues es crucial para la vida. También debe haber un equilibrio entre competición y cooperación, individuos deben mejorar a través de la competencia, porque si otros son más eficaces, obtendrán la mayoría de los recursos. Cooperación permite crear grupos que puedan competir mejor frente a un grupo externo. Del mismo modo es muy importante el balance entre diversidad y uniformidad, hay un deseo natural del individuo por ser único y diferente, lo que eleva los niveles de diversidad, sin embargo se requiere un mínimo de uniformidad para integrar una comunidad. Estos pares constituyen la base de los sistemas adaptativos complejos, los cuales mediante el aprendizaje se adaptan a un ambiente cambiante. Esto implica competir con otros sistemas, donde cada uno intentará mejorar para ganar una parte más grande de los recursos disponibles. Lo que configura los principios fundamentales de la evolución y la selección natural.

Finalmente, extendemos una invitación a la comunidad de científicos a atreverse a mirar otros paradigmas de la ciencia, más allá del trajinado positivismo, que ha sido base epistemológica del cientificismo moderno y que ha derivado en enfoques en extremo reduccionistas de una realidad mucho más compleja; realidad ésta que requiere de audaces abordajes científicos, expansionistas, a los fines de aproximarse a una mejor comprensión de los nuevos fenómenos sociales y naturales.

**Dr. JOSÉ LUIS RODRÍGUEZ PÉREZ**  
*Director*

# DECANATO DE INVESTIGACIÓN

El Decanato de Investigación es una dependencia adscrita al Vicerrectorado Académico de la UNET, cuyo objetivo es promover el desarrollo de la Función Investigación en la UNET, la generación y aplicación de conocimiento, de acuerdo con los objetivos y políticas institucionales. Está conformado por el Consejo de Decanato (CODEIN), las Coordinaciones de Investigación Industrial, Agropecuaria, Socio Económica Cultural, Ciencias Exactas y Naturales, la Unidad Administrativa y la Unidad de Proyectos Especiales.

El Decanato de Investigación de la Universidad Nacional del Táchira (UNET), ha pasado por nueve (9) gestiones y cada una de ellas ha venido desarrollando progresivamente la función de investigación. Una de las actividades que se han llevado a cabo en primera instancia por esta gestión, fue rescatar su historia. A tal efecto, se le encomendó esta tarea a la Prof. María Alruiz de Torres quien en febrero de 2000, presentó el Folleto · "Decanato de Investigación 25 años" en donde se detalla de manera muy sencilla quienes han dirigido esta importante dependencia, así:

<b>Dr. Alfredo Rivas Vásquez (1975 -1977)</b>	<b>Dr. Gerardo Pérez Nieto (1989 -1992)</b>
<b>Dr. José Ramírez Martínez (1979 -1980)</b>	<b>Ing. Martín Paz (1992-1998)</b>
<b>Ing. Luis Ramírez (1980-1983)</b>	<b>Ing. Raúl Casanova Ostos (1998 -2007)</b>
<b>Ing. Ricardo López ( 1983-1986)</b>	<b>Dr. José Luis Rodríguez (2007 - 2010)</b>
<b>Ing. Ricardo Porras (1986-1989)</b>	

## REVISTA CIENTÍFICA UNET

La Revista Científica UNET, es un organo divulgativo de la Universidad Nacional Experimental del Táchira, cuyo objetivo es el de difundir los productos de investigación que se generan en el interior de nuestra institución. Fundamentalmente abarca las diferentes áreas de las Ciencias Físicas y Matemáticas, Ciencias Biológicas, Sociales y Ciencias de la Tierra y del Medio Ambiente. En ella se publican todos aquellos originales, producidos tanto por el personal de la UNET, como por otras instituciones universitarias previa solicitud escrita por parte de los interesados, los cuales son arbitrados y aprobados por el Comité Editorial.

La Revista Científica UNET, es una revista venezolana, tachirense, de actualización científica, creada por el Consejo Universitario de la UNET N° 003.88 de 12 de febrero de 1988 y el primer número apareció el 10 de noviembre de 1987, con una breve ausencia durante el periodo 1996-1998. Actualmente la Revista es arbitrada con destacados investigadores nacionales y regionales. A lo largo de los últimos años se ha venido consolidando en varios aspectos, principalmente: 1. Soporte tecnológico, incluyendo administrador de contenidos y administrador de base de datos de usuarios inscritos a través de la lista de canje y donación de la Biblioteca UNET. 2. Periodicidad a través de la regularización de su publicación semestral (junio y noviembre); tendiendo a una producción trimestral y con mayor número de artículos por volumen y digitalizados para ser colocados en servidores Web.

La Revista Científica UNET, cuenta con un Comité de Árbitros anónimos, especializados en cada área para la revisión de los artículos aquí publicados.

Para contactos dirigirse a:  
Comité Editorial de Revista Científica UNET, Universidad Nacional Experimental del Táchira, Decanato de Investigación, Avenida Universidad Paramillo, San Cristóbal, Estado Táchira. República Bolivariana de Venezuela.  
Teléfono: 0276-3530422 Ext. (313 - 314-465 / Telefax 0276 - 3532454. 3532949).  
Apartado Postal 02 IPOSTEL-UNET.  
Correo Electrónico: [rcunet@unet.edu.ve](mailto:rcunet@unet.edu.ve)

Se aceptan canjes con Instituciones Académicas y Gubernamentales nacionales e internacionales, las cuales publiquen o distribuyan con carácter periódico, revistas, publicaciones o informes estadísticos.

## CAOS COLECTIVO EN REDES DE PEQUEÑO MUNDO

(Collective chaos on small-world networks)

González-Estévez, J.<sup>1,2</sup>; Cosenza, M. G.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratorio de Física Aplicada y Computacional,  
Universidad Nacional Experimental del Táchira, San Cristóbal, Venezuela.

<sup>2</sup>Centro de Física Fundamental, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.

Correo electrónico: [jgonzale@unet.edu.ve](mailto:jgonzale@unet.edu.ve), [mconsenza@ula.ve](mailto:mconsenza@ula.ve)

### RESUMEN

El caos colectivo estable consiste en la persistencia de patrones desordenados en sistemas dinámicos espaciotemporales que poseen un espectro de Lyapunov negativo. En este trabajo se analiza el rol de la topología de conectividad en el surgimiento de caos estable en sistemas de mapas acoplados en redes de pequeño mundo, caracterizadas por una probabilidad de reconexión  $p$ . Como dinámica local empleamos un mapa que presenta una órbita superestable de período tres. Se encuentra que el caos colectivo es inhibido en ciertos rangos de valores de la probabilidad  $p$ ; en su lugar, el sistema alcanza un estado sincronizado igual al período tres del mapa local. Nuestros resultados evidencian el rol fundamental de la topología de la red y de la presencia de conexiones de largo alcance para el colapso del caos estable en sistemas espaciotemporales.

**Palabras Clave:** Caos espaciotemporal, sincronización, redes de pequeño mundo, redes aleatorias.

### ABSTRACT

Collective stable chaos consists of the persistence of disordered patterns in dynamical spatiotemporal systems possessing a negative Lyapunov exponent. In this work we analyze the role of the topology of connectivity in the emergence of stable chaos in systems of coupled maps defined on small-world networks. The networks are characterized by a rewiring probability  $p$ . As local dynamics we employ a map that exhibits a superstable orbit of period three. We found that collective chaos is inhibited on some ranges of values of the probability  $p$ ; in these regions, instead, the system reaches a synchronized state equal to the period-three orbit of the local map. Our results show the fundamental role that the network topology and the presence of long range connections play on the collapse of stable chaos in spatiotemporal systems.

**Key Words:** Spatiotemporal chaos, synchronization, small-world networks, random networks.

## INTRODUCCIÓN

La investigación de comportamientos colectivos en redes de elementos dinámicos acoplados tiene implicaciones fundamentales para la comprensión de propiedades universales que aparecen en los sistemas complejos. En este sentido, es de especial interés el fenómeno de comportamiento dinámico colectivo no trivial, el cual consiste en la coexistencia de evoluciones temporales disímiles de cantidades macroscópicas y de variables microscópicas en un sistema (Manrubia, *et al.* 2004). Este comportamiento se manifiesta de dos formas. Por un lado, se ha descubierto el surgimiento de orden en la evolución temporal de la dinámica de cantidades macroscópicas de un sistema de elementos caóticos acoplados. Por ejemplo, el promedio espacial de los estados de los elementos del sistema puede ser periódico en el tiempo, mientras que la evolución de esos elementos es caótica y desincronizada. Este fenómeno ha sido ampliamente estudiado (Kaneko 1990a, Kaneko 1994, Chaté y Manneville 1992, Cosenza y González, 1998). La contraparte de este fenómeno también ha sido observada: la persistencia de caos colectivo o desorden temporal a nivel macroscópico en sistemas de elementos acoplados cuya dinámica individual es periódica. Este comportamiento no trivial se ha denominado caos colectivo (Politi *et al.* 1993, Kapral *et al.* 1994, Kapral *et al.* 1997) y es uno de los fenómenos emergentes menos entendidos en sistemas complejos.

El comportamiento colectivo irregular que ocurre a partir de elementos dinámicos periódicos acoplados puede clasificarse en dos tipos: (1) El caos transiente: que consiste en un régimen verdaderamente caótico con un tiempo de vida finito, y se caracteriza por la coexistencia de atractores estables y de conjuntos caóticos no atractivos (repulsores) en el espacio de fase de un sistema. En este tipo de sistemas, una configuración inicial

genérica produce una trayectoria típicamente irregular hasta que ésta colapsa abruptamente en un atractor no caótico (Wackerbauer y Showalter, 2003).

(2) El caos estable: que constituye un comportamiento irregular que no puede ser descrito mediante la presencia de repulsores en el espacio de fase del sistema, trayendo por consecuencia la divergencia de trayectorias cercanas. Por otra parte, en esta clase de sistemas, el tiempo invertido durante el régimen transiente puede escalar exponencialmente con el tamaño del sistema, y el

atractor final estable no puede ser alcanzado en términos prácticos (escala de tiempo enorme) para sistemas suficientemente grandes (Crutchfield y Kaneko 1988, Kaneko 1990b, Politi *et al.* 1993, Cecconi *et al.* 1998, Bagnoli y Cecconi, 2001).

En el caso de caos estable, el comportamiento colectivo transitorio, que habitualmente es considerado irrelevante, resulta estadísticamente estacionario y caótico. El comportamiento del sistema en el régimen transitorio no podría ser distinguido de un comportamiento caótico típico. Por este motivo, hablamos de la existencia de supertransitorios en estos sistemas, puesto que el comportamiento colectivo caótico resulta, para un sistema incluso moderadamente pequeño, el único comportamiento prácticamente observable. Los primeros reportes de este fenómeno datan de finales de los años 80 (Crutchfield y Kaneko, 1988, Kaneko 1990b). En estos trabajos se estudia un modelo de red de mapas acoplados en el cual se muestra que, para una red de tamaño moderado de 128 elementos y, tomando en cuenta la velocidad y la precisión del computador, se obtiene que el tiempo característico del régimen supertransitorio puede ser del orden de  $10^{64}$  años. Tomemos como referencia que la edad estimada actual de nuestro Universo, corresponde a  $(13.7 \pm 0.2) \times 10^9$  años), según los datos y análisis más recientes del satélite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) (WMAP, 2008). Este resultado tiene un profundo impacto en algunos fenómenos físicos que aún no han sido completamente comprendidos, como es el caso de la turbulencia, o en la observación de comportamientos aperiódicos en sistemas complejos, pues tales comportamientos podrían corresponder, desde un punto de vista estrictamente matemático, a un estado transitorio. Desde el punto de vista práctico, nunca observaremos el comportamiento final regular y lo verdaderamente estacionario será de hecho el régimen supertransitorio de caos colectivo (Bagnoli y Cecconi, 2001).

El proceso de colapso del caos espaciotemporal ha sido estudiado también en sistemas continuos de reacción-difusión del tipo Gray-Scott (Wackerbauer y Showalter, 2003; Wackerbauer y Kobayashi, 2007; Wackerbauer, 2007; Yonker y Wackerbauer, 2006), en donde se ha reportado la naturaleza transiente del caos espaciotemporal emergente, y se ha encontrado que las condiciones de contorno espaciales pueden inducir el colapso de caos espaciotemporal en un

sistema.

En el presente trabajo investigamos la influencia de la topología de conectividad en redes de elementos dinámicos interactivos para el surgimiento y colapso del caos colectivo estable.

Debido a su naturaleza espacial discreta, los sistemas de redes de mapas acoplados resultan especialmente adecuados para la investigación de fenómenos físicos que ocurren en redes no uniformes de elementos interactivos o en medios heterogéneos o desordenados. Un tipo de red no uniforme que ha sido recientemente el centro de atención de muchas e interesantes investigaciones, son las redes de pequeño mundo (Watts y Strogatz, 1998), debido a su ubicuidad en la Naturaleza. Una red de pequeño mundo posee dos atributos esenciales que serán definidos de manera formal posteriormente; siendo el primero de estos la longitud característica  $L$ , caracterizado por el promedio de las longitudes mínimas  $L^{\min(i,j)}$  entre todos los pares de nodos  $(i, j)$ , y cuyo valor es pequeño; el segundo atributo es el coeficiente de agrupamiento  $C$ , que indica la probabilidad de que dos nodos conectados directamente a un tercero, estén conectados a su vez entre sí y su valor es grande en comparación con  $L$ . En este trabajo emplearemos el algoritmo de (Watts y Strogatz, 1998) para construir una red de pequeño mundo e investigar el fenómeno de caos colectivo estable en este tipo de sustrato.

En la sección método se indica el algoritmo para crear redes de diversa conectividad y el criterio para establecer, tanto redes de pequeño mundo, como redes aleatorias. Sobre esta redes definiremos un sistema de mapas acoplados que exhibe el fenómeno de caos estable en ciertos rangos de parámetros del sistema. Utilizamos varias cantidades macroscópicas para monitorear la presencia de caos colectivo estable en función de los parámetros. En la sección resultados se analiza el rol de las conexiones no locales en la emergencia de caos estable. Finalmente, en la sección conclusiones se presenta un interpretación de los resultados de este trabajo.

## MÉTODO

Utilizaremos el algoritmo de construcción de redes de pequeño mundo propuesto originalmente por (Watts y Strogatz, 1998). Comenzamos de un anillo con  $N$  nodos, donde cada nodo está conectado a sus  $K$  vecinos más cercanos. Entonces cada conexión es redirigida al azar con una probabilidad  $p$  hacia

cualquier otro lugar de la red, evitando las autoconexiones y las conexiones duplicadas. Posteriormente al proceso de recableado o reconexión, el número de elementos conectados a cada nodo (los cuales denominaremos los vecinos de ese nodo) puede variar, pero el número total de enlaces en la red es constante e igual a  $Nk/2$ . Se supone que todos los enlaces son bidireccionales. Para  $p = 0$ , la red es completamente regular, mientras que para  $p = 1$ , la red resultante es completamente aleatoria. Con este algoritmo, una red de pequeño mundo se forma para valores intermedios de la probabilidad  $p$ . La condición.

$$\log N \ll k \ll N, \quad (1)$$

se emplea en el algoritmo para garantizar que ningún elemento quede aislado luego del proceso de recableado, lo que da lugar a un grafo conexo.

Para encontrar las regiones de comportamientos de tipo pequeño mundo y aleatorio en esta red, se deben calcular dos cantidades:

1.) el coeficiente de agrupamiento  $C^i$  para cada nodo  $i$ , el cual está dado por el cociente entre las conexiones existentes  $E^i$  entre sus  $k^i$  vecinos y el número total de posibles conexiones entre estos, el cual es  $k^i(k^i - 1)/2$  (Davidsen *et al.* 2002). Entonces, el coeficiente de agrupamiento  $C$  de la red se define como el promedio de los coeficientes de agrupamiento de todos los nodos,

$$C = \langle C^i \rangle = \left\langle \frac{2E^i}{k^i(k^i - 1)} \right\rangle; \quad (2)$$

en otras palabras, el coeficiente de agrupamiento indica la fracción media de los vecinos  $k^i$  del nodo  $i$  que son vecinos entre sí;

2.) la longitud característica de la red, la cual se define como el promedio de las distancias más cortas entre todos los pares de nodos de la red. El promedio de estas distancias al nodo  $i$  es

$$L^i = \left\langle L^{\min(i,j)} \right\rangle, \quad (3)$$

donde  $L^{\min(i,j)}$  representa la distancia más corta entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$ . Aquí la distancia se define como el número de conexiones entre dos nodos. En consecuencia, la longitud característica de la red es promediada para todos los nodos  $i$ .

$$L = \left\langle L^i \right\rangle, \quad (4)$$

La figura 1 muestra el coeficiente de agrupamiento normalizado y la longitud característica en función de la probabilidad de recableado  $p$  para una red construida con el algoritmo descrito anteriormente. La región  $p \in (0, 0.001)$  corresponde a una red con comportamiento regular. La red de pequeño mundo surge en el rango  $p \in (0.001, 0.2)$ , debido a que el coeficiente de agrupamiento  $C$  es alto en comparación con el de una red aleatoria y, adicionalmente, posee una longitud característica  $L$  pequeña con respecto a una red regular. Finalmente, una red aleatoria emerge desde  $p=0.2$  hasta  $p=1$ .

El estado de cada nodo en la red puede ser descrito por una variable continua, la cual evoluciona de acuerdo a una regla determinista dependiendo de su propio estado y de los estados de sus vecinos en un tiempo dado. Definimos un sistema de mapas acoplados difusivamente sobre una red generada mediante el algoritmo anteriormente expuesto, como

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i) + \frac{\epsilon}{k^i} \sum_{j \in v^i} [f(x_t^j) - f(x_t^i)], \quad (5)$$

donde,  $x^i$  es el estado del  $i$ -ésimo mapa para el tiempo discreto  $t$ , con  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $k^i$  es el numero de elementos conectados al elemento  $i$ ;  $v^i$  es el conjunto de vecinos de  $i$ ;  $f(x)$  es una función que describe la dinámica local y  $\epsilon$  es el parametro de acoplamiento. Un mapa con ingredientes mínimos que presenta comportamiento periódico estable es (Politi *et al.* 1993).

$$f(x) = \begin{cases} bx, & 0 < x < 1/b \\ a + c(x - 1/b), & 1/b \leq x < 1 \end{cases}, \quad (6)$$

donde  $x \in [0, 1]$  y los parámetros del mapa  $a, b$  son elegidos tal que la dinámica local converja hacia una órbita superestable de período tres, correspondiente a los puntos  $x_1 = a \rightarrow x_2 = ab \rightarrow x_3 = ab^2$ . En adelante, fijaremos  $a = 0.1$ ,  $b = 2.5$  y  $c = 0$ . Una órbita superestable posee un exponente de Lyapunov,  $\lambda$ , con valor  $\lambda \rightarrow -\infty$ .

Nótese que la estabilidad de la órbita del mapa local definido en la expresión (6) implica la estabilidad del sistema dada por la ecuación (5), cuyo máximo exponente de Lyapunov resulta ser negativo para cualquier valor de  $\epsilon$ . Como consecuencia, la evolución a largo plazo del sistema acoplado está confinada a su atractor periódico.

El comportamiento colectivo del sistema puede ser caracterizado por el campo medio del sistema, definido por

$$H_t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_t^j). \quad (7)$$

Similarmente, la sincronización de los elementos según la ecuación (5) puede ser caracterizada por el promedio temporal asintótico ( $\sigma$ ) de las desviaciones estándar instantáneas  $\sigma_t$  de la distribución de las variables de los nodos  $x^i$  definido como

$$\sigma_t = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(x_t^i))^2 - H_t^2 \right]^{1/2}. \quad (8)$$

Un estado sincronizado corresponde a  $(\sigma)=0$ . En minos prácticos, fijaremos el criterio  $(\sigma) \leq 10^{-7}$  para sincronización. En nuestro caso, el sistema dado por la ecuación (5) puede sincronizarse en la órbita de período tres del mapa local para ciertos valores de parámetros.

En todos los cálculos que se presentan a continuación, hemos empleado redes con  $N=10^4$  elementos, y asignando condiciones iniciales aleatorias  $x^i \in [0, 1]$  para cada elemento  $i$  cuya dinámica local  $f(x)$  viene dada por la ecuación (6).

## RESULTADOS

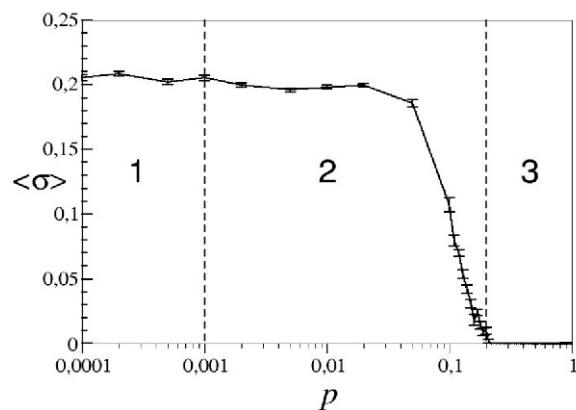
La figura 2 muestra el diagrama de bifurcación del campo medio,  $H_t$ , y la desviación estándar promedio ( $\sigma$ ) como función del parámetro de acoplamiento  $\epsilon$  para una red regular unidimensional, la cual corresponde a los valores  $k=2$  y  $p=0$ .

En la figura 2 se observa que  $H_t$ , que representa el comportamiento colectivo del sistema, exhibe un comportamiento caótico en un amplio rango del parámetro  $\epsilon$ , a pesar que mapas que forman el sistema tienen un comportamiento de período tres y que el atractor global del sistema debe ser el estado sincronizado igual a la órbita superestable de período tres del mapa local. Se observa que  $(\sigma) \neq 0$ , lo que indica que el sistema no llega a un estado sincronizado en su evolución a largo plazo. El tiempo de convergencia para alcanzar el estado asintótico sincronizado periódico es exponencialmente grande. La figura 2 evidencia el fenómeno de caos colectivo estable en este sistema. Es importante señalar que en la escala presentada de esta figura, para valores muy pequeños del acoplamiento ( $\epsilon \in [0, 0.007]$ ) el campo medio  $H_t$  aparentemente oscila colectivamente con período dos, lo cual no es cierto, debido a que esto es

producto de un efecto visual, ya que en realidad para la rama inferior en el rango de  $\epsilon$  indicado se superponen dos de los tres valores en los cuales oscila  $H$ .

Con el propósito de estudiar la influencia de las conexiones de largo alcance en el colapso del caos estable, calculamos la cantidad ( $\sigma$ ) como función de la probabilidad de recableado  $p$ , para diferentes valores de parámetros en la ecuación (5), tal como se muestra en la figura 3. Nótese que existe un valor crítico de la probabilidad  $p$  por encima del cual el sistema alcanza un estado sincronizado, para el cual  $(\sigma) \rightarrow 0$ . Este estado sincronizado corresponde a la órbita superestable de período tres del mapa local indicado por la expresión (6). Luego, la presencia de un número suficiente de conexiones de largo alcance, asociadas con un aumento de  $p$  en la red, contribuye al colapso del caos colectivo estable en este sistema.

La figura 4 presenta una visualización de los patrones espaciotemporales en este sistema, correspondientes al estado de caos colectivo estable y al estado sincronizado de período tres.



reconexión  $p$ ,  $\epsilon = 0.384$ ,  $N = 10^4$  y  $k = 10$ . La cantidad ( $\sigma$ ) es el promedio de  $10^2$  valores de  $\sigma$ , después de haber descartado  $3 \times 10^4$  iteraciones del régimen transitorio. Para cada valor de  $p$  fueron hechas 10 realizaciones, mostrándose para cada punto el promedio de las mismas y sus barras de error asociadas. En cada paso de barrido en el parámetro  $p$ , se emplean condiciones iniciales aleatorias  $x_0^i \in [0, 1]$ . Las regiones mostradas corresponden a redes: (1) regulares; (2) pequeño mundo, (3) aleatorias.

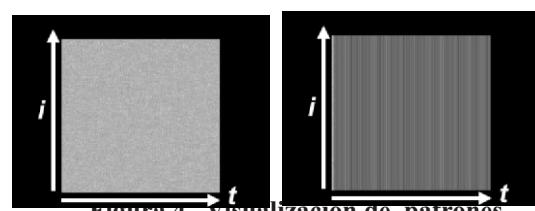


Figura 4. visualización de patrones espaciotemporales asintóticos en el sistema (5) con  $k = 10$ . El eje vertical representa los estados  $x^i$  de los mapas (sin orden espacial) y el eje horizontal corresponde al tiempo. El código de colores se ha calibrado con respecto a los valores de la órbita superestable de período tres del mapa (6) y se ha utilizado el entorno gráfico PGPLT. Panel izquierdo: caos estable;  $p = 0.1, \epsilon = 0.1$ . Panel derecho: estado sincronizado de período tres;  $p = 0, \epsilon = 0.77$ .

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La naturaleza transiente del caos colectivo observado en el sistema dado por la ecuación (5) implica que eventualmente el comportamiento de caos estable observado para ciertos rangos de parámetros en las figuras anteriores converger hacia el atractor periódico estable de período tres del mapa local indicado por la expresión (6). Sin embargo, el régimen de caos colectivo estable es, efectivamente, supertransitorio; es decir, que el tiempo de convergencia hacia el estado sincronizado de período tres aumenta exponencialmente con el tamaño del sistema. En tal sentido, hemos verificado que, aun para un sistema pequeño de  $N=10$  mapas, se requiere del orden de  $10^{10}$  iteraciones para que el sistema alcance a su estado sincronizado de período tres. La naturaleza transiente del caos colectivo observado en el sistema dado por la ecuación (5) implica que eventualmente el comportamiento de caos estable observado para ciertos rangos de parámetros en las figuras anteriores converger hacia el atractor periódico estable de período tres del mapa local indicado por la expresión (6). Sin embargo, el régimen de caos colectivo estable es, efectivamente, supertransitorio. Luego, el caos colectivo es el estado efectivamente observable en la práctica en esos rangos de parámetros.

La existencia de un régimen supertransitorio es interesante en la medida en que este comportamiento, que habitualmente es considerado irrelevante, es estadísticamente estacionario. El régimen transitorio es estadísticamente estable y no podemos distinguirlo de un comportamiento caótico

típico. Por este motivo los estados supertransitorios son, incluso para un sistema moderadamente pequeño, el único comportamiento realmente observable. La existencia de un régimen supertransitorio es interesante en la medida en que este comportamiento, que habitualmente es considerado irrelevante, es estadísticamente estacionario.

## CONCLUSIONES

Las figuras 3 y 4 muestran que el sistema puede alcanzar el estado sincronizado de período tres cuando se cambia la topología de la red. Nuestros resultados evidencian el rol fundamental de la topología de conectividad de la red para el colapso del caos estable en sistemas espaciotemporales. La presencia de interacciones de largo alcance entre los elementos del sistema, inducidas por la probabilidad de recableado  $p$ , facilitan la transmisión de información y la posibilidad de sincronización en redes de pequeño mundo y en redes aleatorias.

Nuestros resultados indican que la persistencia del caos estable en sistemas espacio-temporales depende de propiedades topológicas del sustrato espacial y, por lo tanto, no son propiedades robustas. Los resultados del presente trabajo sugieren que los comportamientos colectivos no triviales observados en muchos sistemas complejos pueden ser modulados o controlados mediante cambios en sus propiedades geométricas.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Dr. K. Tucci (ULA) por haber facilitado el acceso a la herramienta de simulación computacional ISYS (*Inhomogeneous Systems Simulator*) (Tucci, 2002) para realizar los cálculos del presente trabajo. Los autores agradecen el apoyo del Consejo de Desarrollo, Científico, Tecnológico y Humanístico, Universidad de Los Andes, Mérida, a través del proyecto C-1559-08-05-Ed y de los árbitros que efectuaron sus valiosas sugerencias en este trabajo. J. G.E. agradece el apoyo del Decanato de Investigación de la Universidad Nacional Experimental del Táchira (UNET), mediante los proyectos 04-001-2006 y 04-002-2006, e igualmente agradece al Vicerrectorado Académico de la UNET por la continuidad en el otorgamiento de su beca doctoral.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAGNOLI, F. Y CECCONI, F. Synchronization of nonchaotic dynamical systems, *Phys. Lett. A*, 282:9-17, 2001.
- CECCONI, F.; LIVI, R. y POLITI, A. Fuzzy transition region in a one-dimensional coupled-stable-map lattice, *Phys. Rev. E*, 57:2703-2712, 1998.
- CHATE, H. y MANNEVILLE, P. Emergence of effective low-dimensional dynamics in the macroscopic behaviour of coupled map lattices, *Europhys. Lett.* 17: 291-296, 1992.
- CRUTCHFIELD, J. y KANEKO, K. Are attractors relevant to turbulence?, *Phys. Rev. Lett.* 60:2715-2718. 1988.
- COSENZA, M. y GONZALEZ, J. Synchronization and collective behavior in globally coupled logarithmic maps, *Prog. Theor. Phys.* 100: 21-38. 1998.
- DAVIDSEN, J.; EBEL, H. y BORNHOLDT, S. Emergence of a small world from local interactions: modeling acquaintance networks, *Phys. Rev. Lett.* 88:128701. 2002.
- KANEKO, K. Globally coupled chaos violates law of large numbers, *Phys. Rev. Lett.* 65: 1391-1394. 1990a.
- KANEKO, K. Supertransients, spatiotemporal intermittency, and stability of fully developed spatiotemporal chaos, *Phys. Lett. A*, 149:105-112. 1990b.
- KANEKO, K. Relevance of clustering to biological networks, *Physica D*, 75, 55-73. 1994.
- KAPRAL, R.; LIVI, R.; OPPO,G. y POLITI, A. Dynamics of complex interfaces, *Phys. Rev. E*, 49:2009-2022. 1994.
- KAPRAL, R.; LIVI, R.; OPPO,G. y POLITI, A. Critical behavior of complex interfaces, *Phys. Rev. Lett.* 79:2277-2280. 1997.
- POLITI, A.; LIVI, R.; OPPO, G. y KAPRAL, R. Unpredictable behavior in stable systems, *Europhys. Lett.* 22:571-576. 1993.
- MANRUBIA, S.; MIKHAILOV, A. y ZANETTE, D. Emergence of dynamical order, World Scientific, Singapore. 2004.
- TUCCI, K. Procesos dinámicos espaciotemporales en redes inhomogéneas, Tesis de Doctorado, Postgrado en Física Fundamental, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela. 2002.

WACKERBAUER, R. y SHOWALTER, K. Collapse of spatiotemporal chaos, *Phys. Rev. Lett.* 91: 174103. 2003.

WACKERBAUER, R. y KOBAYASHI, S. Noise can delay and advance the collapse of spatiotemporal chaos. *Phys. Rev. E* 75,066209. 2007.

WACKERBAUER, R. Master stability analysis in transient spa- tiotemporal chaos, *Phys. Rev. E* 76: 056207. 2007.

WATTS, D. y STROGATZ, S. Collective dynamics of “small-world” networks, *Nature* 393:440-442. 1998.

WMAP. Mission Results, obtenido de word wide web. <http://map.gsfc.nasa.gov/news/index.html>

YONKER, S. y WACKERBAUER, R. Nonlocal coupling can prevent the collapse of spatiotemporal chaos, *Phys. Rev. E* 73: 026218. 2006.

## MODELO DE INTERCAMBIO ECONÓMICO EN UNA SOCIEDAD ESTRATIFICADA CON INTERACCIONES LOCALES

**(A model of economic exchange in a stratified society with local interactions)**

Herrera, J.<sup>1</sup>; Cosenza, M.<sup>2</sup>; Tucci, K.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Escuela Básica, Facultad de Ingeniería,  
Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela

<sup>2</sup> Centro de Física Fundamental, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

<sup>3</sup> SUMA-CeSiMo, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela

Correo Electrónico: [jherrera@ula.ve](mailto:jherrera@ula.ve)

### RESUMEN

Se investiga un modelo de agentes económicos interactivos en una sociedad estratificada en la que se introduce la noción de conectividad local. Los agentes se ubican en una red donde las interacciones ocurren entre agentes conectados, solamente si estos pertenecen a un mismo estrato económico. Un estrato se define a través de un parámetro que mide la diferencia máxima de riqueza entre agentes requerida para interaccionar. Las propiedades colectivas del sistema se caracterizan mediante el coeficiente de Gini, que describe el grado de desigualdad en la distribución de riqueza en el sistema, y mediante un novedoso parámetro de orden, que denominamos la actividad, y el cual mide el promedio de la riqueza total intercambiada en el tiempo.

**Palabras Clave:** Econofísica, redes complejas, coeficiente de Gini.

### ABSTRACT

A model of interacting economic agents in a stratified society is investigated when the notion of local connectivity is introduced. The agents are placed on a network where interactions between connected agents occur if they belong to the same economic stratum. A stratum is defined through a parameter that measures the maximum difference in wealth that agents may have in order to interact. The collective properties of the system are characterized by the Gini coefficient, that measures the degree of inequality in the wealth distribution in the system, as well as by a novel parameter, called the activity, that measures the average wealth exchanged in time.

**Key Words:** Econophysics, complex networks, Gini coefficient.

## INTRODUCCIÓN

Desde su aparición en tiempos recientes, la econofísica (Mantegna y Stanley, 2000) ha utilizado diversos métodos de Física Estadística para resolver problemas de Economía y Finanzas. En la mayoría de los modelos de intercambio económico propuestos, se ha considerado la aleatoriedad de las interacciones entre agentes como un ingrediente esencial (Yakovenko 2008, Chakrabarti *et al.* 2006, Chatterjee y Chakrabarti 2007).

En este marco conceptual, los agentes económicos se comportan como un gas clásico, sin noción de localidad espacial.

Por otro lado, una característica común en muchos procesos donde se intercambian recursos es la presencia de rangos o bandas para la ocurrencia de interacción entre agentes de un sistema. En sistemas económicos o sociales, estos rangos para la ocurrencia de interacción se identifican con el concepto de clases o estratos. En este contexto, un modelo interesante de intercambio de riquezas en una sociedad estratificada fué propuesto recientemente por (Laguna *et al.* 2005).

Este modelo muestra que, para ciertos valores de parámetros, desaparece la clase media, es decir, la población de agentes que poseen riquezas intermedias. Las interacciones solamente tienen lugar entre agentes que pertenecen a una misma clase económica, pero al igual que otros modelos econofísicos, éste también supone que la interacción ocurre aleatoriamente entre cualquier par de agentes en el sistema.

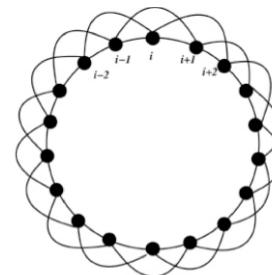
Desde el punto de vista topológico, este tipo de interacción de largo alcance corresponde a una red de conectividad global, donde cada elemento está conectado con todos los elementos del sistema.

A partir de la década de los 90's, el descubrimiento de la ubicuidad de las redes de pequeño mundo por (Watts y Strogatz, 1998), desató mucho interés en el estudio de la red de conectividad subyacente en una variedad de sistemas complejos en distintos contextos, incluyendo sistemas sociales y económicos.

En el presente trabajo, investigamos la influencia de la topología de conectividad en las propiedades colectivas y estadísticas de un modelo de intercambio económico estratificado en el cual introducimos la noción de conectividad topológica local. Mediante la variación de un parámetro que mide el tamaño del entorno local, se obtiene como caso límite el modelo de (Laguna *et al.* 2005).

## MODELO

Consideramos una población de  $N$  agentes económicos interactivos, ubicados en los nodos de una red unidimensional con condiciones de borde periódicas, donde cada agente está conectado con  $k$  vecinos, como se muestra en figura 1.



**Figura 1.** Red unidimensional con condiciones de borde periódicas y  $k = 4$  vecinos por agente.

Cada agente  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) está caracterizado por una riqueza  $w_i(t)$  en el tiempo  $t$  y un factor de aversión al riesgo  $\beta_i$ . La riqueza  $w_i(t)$  puede cambiar como consecuencia de las interacciones. Supondremos, por simplicidad, que  $\beta_i$  se mantiene fijo para cada agente  $i$  durante todo el proceso. Se escogen como condiciones iniciales para ambas variables distribuciones uniformes  $w_i \in [0, 1]$ ,  $\beta_i \in [0, 1]$ . La cantidad  $[1 - \beta_i]$ , mide el porcentaje de riqueza que el agente  $i$  está dispuesto a arriesgar en sus interacciones con los demás agentes. La dinámica de interacción en un instante  $t$  se describe con el siguiente algoritmo iterativo:

- 1) Escoja aleatoriamente un agente  $i$ .
- 2) Escoja aleatoriamente un agente  $j$  que pertenezca a la vecindad del agente  $i$ .
- 3) Verifique si se cumple la relación

$$|w_i(t) - w_j(t)| < u \quad (1)$$

Repita 1 y 2 hasta que se cumpla la condición 3.

- 4) Calcule la cantidad de riqueza a intercambiar  $dw$ , definida como

$$dw = \min[(1 - \beta_i)w_i(t); (1 - \beta_j)w_j(t)] \quad (2)$$

- 5) Asigne con probabilidad  $p$  la cantidad  $dw$  al agente con menor riqueza entre  $i$  y  $j$ , y con probabilidad  $(1 - p)$  asigne esa cantidad al agente con mayor riqueza de ambos; donde  $p$  es

5) Asigne con probabilidad  $p$  la cantidad  $dw$  al agente con menor riqueza entre  $i$  y  $j$ , y con probabilidad  $(1 - p)$  asigne esa cantidad al agente con mayor riqueza de ambos; donde  $p$  es

$$p = \frac{1}{2} + f \times \frac{|w_i(t) - w_j(t)|}{w_i(t) + w_j(t)}. \quad (3)$$

El parámetro  $u$  mide el ancho del estrato o clase económica. Para que dos agentes puedan interaccionar, su diferencia de riqueza no debe ser mayor que  $u$ , es decir, deben pertenecer al mismo estrato. Aquí asumimos que los diferentes estratos tienen el mismo ancho  $u$ . El parámetro  $f$  representa la intervención de un ente externo (por ejemplo, el estado) que regula todas las interacciones con el fin de redistribuir la riqueza en el sistema, y se expresa como la probabilidad de favorecer a los agentes de menores recursos en las transacciones, definida en el rango  $f \in [0, 1/2]$ . El valor  $f = 0$  corresponde a igual probabilidad para ambos agentes y  $f = 1/2$  representa la máxima probabilidad de favorecer al agente con menor riqueza.

Para caracterizar el comportamiento colectivo del sistema para varios valores de sus parámetros, utilizaremos diversas cantidades. En primer lugar, empleamos el coeficiente de Gini, definido como,

$$G = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |w_i - w_j|}{2N^2 \mu}, \quad (4)$$

donde  $\mu$  es la riqueza promedio del sistema. El coeficiente de Gini expresa el grado de desigualdad en la distribución de riqueza en el sistema. Una distribución equitativa de riqueza, donde todos tienen la misma riqueza, corresponde a un valor de  $G=0$ . El otro extremo, donde un solo agente posee toda la riqueza del sistema, tiene un valor de  $G=1$ .

Para caracterizar la evolución colectiva del sistema, calculamos la cantidad promedio de riqueza intercambiada en el sistema en cada iteración, la cual denominamos “actividad” del sistema, y definimos como

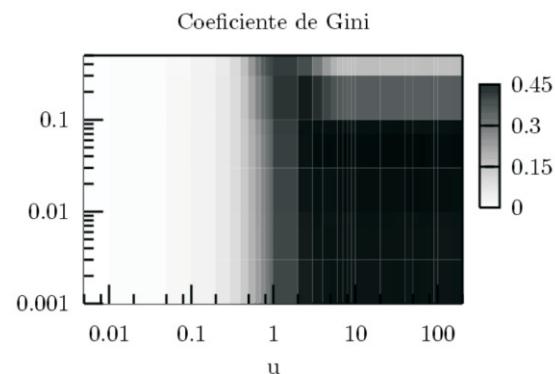
$$A = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=\tau}^T dw_t, \quad (5)$$

donde  $T$  es el tiempo de simulación (suficientemente largo) y  $\tau$  es el número de iteraciones transientes que se desprecian para asegurarse que el sistema se encuentra en un estado asintótico. También calculamos la distribución de probabilidad de riqueza en el sistema para varios valores de parámetros; esto

es, la probabilidad  $P(w)$  de encontrar un valor de riqueza  $w$  entre los agentes del sistema.

## RESULTADOS

Todos los resultados que se presentan corresponden a un promedio de 10 realizaciones con condiciones iniciales diferentes y a estados asintóticos con  $T = 10^8$ . La figura 2 muestra los valores del coeficiente de Gini  $G$  en el estado asintótico del sistema en el espacio de parámetros  $(u, f)$ , con  $k = 4$ .



**Figura 2. Coeficiente de Gini  $G$  en el espacio de parámetros  $(u, f)$ , con  $k = 4$ , en el estado asintótico. La escala de grises a la derecha indica el valor de  $G$ .**

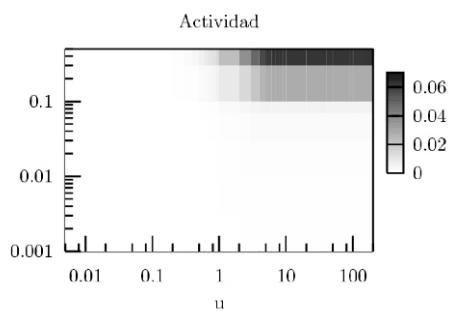
Para valores pequeños del ancho del estrato  $u$ , se observa en la figura 2 que  $G \approx 0$ , independientemente del valor de  $f$ . Este valor de  $G$  se debe a la relativamente escasa interacción que se presenta en el sistema, ya que cuando  $u \rightarrow 0$ , son muy pocos los agentes que pueden interaccionar y, al hacerlo, su diferencia de riqueza sobrepasa el umbral  $u$  rápidamente, alcanzando el estado asintótico con una distribución de riqueza similar a la inicial.

En la región donde  $u \in [0, 1; 3]$ , el coeficiente de Gini  $G$  comienza a cambiar. Para  $0,1 < u < 1$ , independientemente de  $f$ ,  $G$  aumenta, debido al aumento del umbral. Cuando  $u$  alcanza el valor crítico de  $u \approx 1$ ,  $G$  alcanza un valor máximo de  $G \approx 0,45$ . Cabe destacar que estos valores máximos de  $G$  son comparables a aquellos encontrados en datos reales de varios países. En esta región, ya que todos los agentes pueden interaccionar en las primeras iteraciones, sólo unos pocos de ellos son capaces de obtener una riqueza lo suficientemente grande, con lo que quedan económicamente aislados de sus vecinos

más cercanos. Como consecuencia de esto,  $G$  aumenta dando lugar a una distribución de riqueza bastante desigual en el estado asintótico del sistema. En estas dos regiones se observa que  $f$  no juega un papel importante en la dinámica del sistema.

Para  $u > 3$  se observan dos regiones claramente diferenciadas. Para  $f < 0,1$ ,  $G$  conserva su valor máximo. Cuando la probabilidad  $f$  de favorecer al agente con menor riqueza es pequeña, los agentes más ricos del sistema pueden mantener su riqueza y, de esa manera, el sistema mantiene un valor de  $G$  grande. Este comportamiento de  $G$  cambia al aumentar  $f$ . Una mayor probabilidad de favorecer al agente más pobre permite que los recursos del sistema sean mejor redistribuidos, lo que se manifiesta en un disminución del valor de  $G$ .

Para visualizar la evolución de la riqueza en el sistema, calculamos la actividad  $A$  en función de los parámetros  $u$  y  $f$  en el estado asintótico, lo cual se muestra en la figura 3.



**Figura 3. Actividad del sistema  $A$  en el espacio de parámetros  $(u, f)$ , con  $k = 4$ . La escala de grises a la derecha indica el valor de  $A$ .**

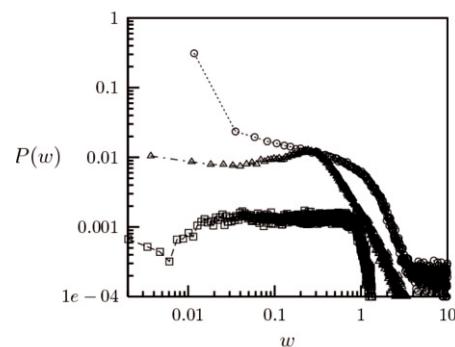
La figura 3 muestra que  $A$  aumenta en forma considerable cuando tanto  $f$  como  $u$  poseen valores altos, lo que corresponde con valores de  $G$  pequeños. Es decir, una distribución equitativa de riqueza está asociada a una alta actividad de intercambio de riqueza en el sistema.

En la región  $u < 1$ , independientemente de  $f$ , tenemos  $A = 0$ . Esto nos dice que en el estado asintótico del sistema no se realiza ningún intercambio de riqueza entre los elementos. Aunque en este caso la distribución de riqueza es equitativa (figura 2), los elementos sólo pueden realizar estos intercambios en las primeras iteraciones de la dinámica.

Para  $u > 1$  y valores de  $f$  pequeños, la actividad del sistema en el estado asintótico cesa, ya que valores de

$u$  altos permiten a algunos elementos del sistema adquirir y mantener riquezas bastante altas y, sin una influencia considerable de  $f$ , no existe una redistribución equitativa de recursos en el sistema. Para  $f > 0,1$ , el comportamiento en el sistema cambia, permitiendo que, aún en el estado asintótico ocurran interacciones. Al aumentar  $u$  y  $f$ , los recursos del sistema son repartidos de manera equitativa, como se observa en el comportamiento de  $G$  (Figura 2).

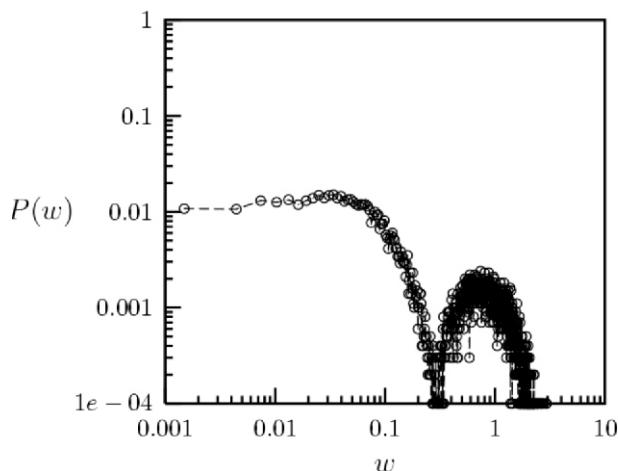
Otra manera de estudiar las propiedades del estado colectivo asintótico del sistema corresponde al cálculo de la distribución probabilidad de riqueza para diversos valores de parámetros, como se muestra en la figura 4.



**Figura 4. Distribución de riqueza en el estado asintótico para diferentes valores de parámetros, con  $k = 4$  fijo.  $u = 0,005, f = 0,1$  (cuadrados);  $u = 10, f = 0,1$  (círculos);  $u = 100, f = 0,5$  (triángulos).**

Al comparar los resultados obtenidos en la figura 4 con los de la figura 2, se observa una concordancia en estos resultados. Para valores de  $u$  y  $f$  pequeños (cuadrados), la distribución de riqueza  $P(w)$  en el sistema se mantiene casi uniforme como consecuencia de la poca actividad en el sistema. Al aumentar estos parámetros,  $P(w)$  se muestra menos uniforme (círculos). Se observa que unos pocos agentes adquieren la mayor cantidad de riqueza en el sistema, mientras que hay un número considerable de agentes que quedan con riqueza casi nula. Para valores grandes de los parámetros (triángulos),  $P(w)$  adquiere una forma más uniforme, lo que también se muestra en la figura 2.

Para otros valores de parámetros, se puede observar que  $P(w)$  cambia abruptamente de forma, como se muestra en la figura 5.

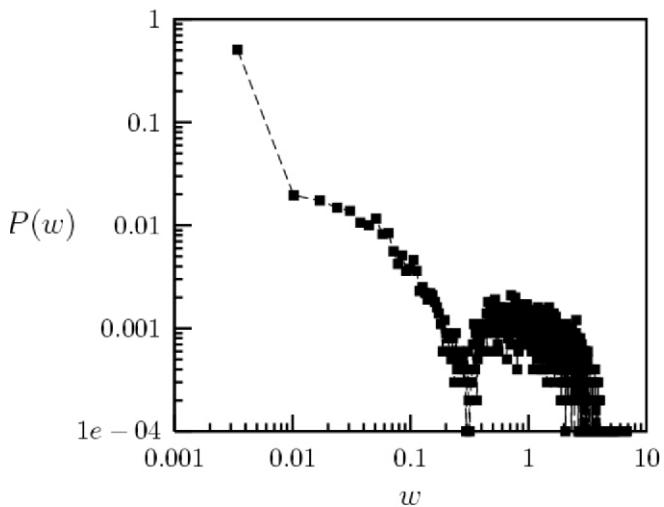


**Figura 5. Distribución de riqueza del sistema, con  $k = 4$  fijo, para  $u = 0,3, f = 0,5$ .**

La figura 5 indica que los elementos con menos riqueza del sistema (valores de  $w$  pequeños) tienen una distribución casi uniforme. Sin embargo, los agentes con mayor riqueza tiene aproximadamente la misma riqueza lo que se muestra con una distribución tipo gaussiana, con una dispersión pequeña. Esto sucede porque los agentes que se hacen más ricos absorben la riqueza de su entorno. Debido a que las interacciones son locales, no hay intercambio entre estos agentes, por lo que ellos mantienen prácticamente la misma riqueza en el tiempo. Esta distribución de probabilidad para los agentes con mayor riqueza cambia al aumentar el número de vecinos conectados o alcance de la interacción  $k$ , como se ve en la figura 6. Para los valores de parámetros de la figura 6 se obtiene un valor del coeficiente de Gini de  $G \approx 0,7$ .

Al aumentar  $k$ , pueden existir conexiones entre los agentes más ricos del sistema, por lo que éstos pueden intercambiar riqueza. Esto conduce a que la distribución de riqueza en este rango de  $w$  se realice de manera no equitativa, lo que se evidencia en la formación de una ley de potencia para valores grandes de  $w$ .

En el límite de valores grandes del número de vecinos  $k$ , tenemos una red con acoplamiento global, donde cada agente puede tener interacción con todos los demás agentes en el sistema, lo que corresponde al modelo de (Laguna *et al.* 2005). En ese límite, nuestros resultados concuerdan con aquellos del modelo de Laguna *et al.* 2005.



**Figura 6. Distribución de riqueza del sistema.  $k = 16, u = 0,3, f = 0,1$ .**

## CONCLUSIONES

La introducción de la topología de conectividad en modelos de intercambio económico tiene efectos importantes, ya que permite la obtención de coeficientes de Gini comparables a los de sociedades reales que son del orden de  $G \approx 0,6$  (Chatterjee *et al.* 2005). Hemos introducido el concepto de actividad como un nuevo parámetro de orden para caracterizar la evolución colectiva de un sistema de agentes económicos.

Hemos encontrado que, tanto la actividad del sistema como distribuciones equitativas de riqueza, correspondientes a valores bajos de  $G$ , pueden lograrse mediante un aumento de la probabilidad  $f$  de favorecer a los agentes con menor riqueza en el sistema y mediante una ampliación del estrato o clase económica para las interacciones posibles. En sociedades reales, se puede lograr a través de mejores políticas de redistribución de los impuestos.

Nuestros resultados revelan que la aparición de una ley de potencia en las distribuciones de probabilidad correspondientes a regiones de riquezas altas está relacionada con la capacidad que tienen los elementos más ricos del sistema de interaccionar entre ellos.

## AGRADECIMIENTOS

J.L. Herrera agradece el apoyo del Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico de

la Universidad de Los Andes, Mérida, mediante el proyecto No. I-1108-08-05-B, y de la Misión Ciencia del FONACIT.

#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CHAKRABARTI, B.; CHAKRABORTI, A. y CHATTERJEE, A. *Econophysics and Sociophysics*, Wiley- VCH, Berlin. 2006.
- CHATTERJEE, A. y CHAKRABARTI, B. Kinetic exchange models for income and wealth distributions, *Eur. Phys. J. B.* 60:135-149. 2007.
- CHATTERJEE, A.; YARLAGADDA, S. y CHAKRABARTI, B. *Econophysics of Wealth Distributions*, Springer Verlag, Milan. 2005.
- LAGUNA, M.; RISAU, S. y IGLESIAS, J. Economic exchanges in a stratified society: End of the middle class?, *Physica A* 356:107-113. 2005.
- MANTEGNA, R. y STANLEY, H. *An Introduction to Econophysics*, Cambridge University Press, Cambridge. 2000.
- WATTS, D. y STROGATZ, S. Collective dynamics of small-world networks, *Nature (London)*. 393, 440.1998.
- YAKOVENKO, V. Preprint arXiv:0709.3662, en *Encyclopedia of Complexity and System Science*, Springer. 2009.

## AUTO-ORGANIZACIÓN EN REDES AD-HOC

### (Self-organization in Ad-Hoc Networks)

Albornoz, J.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Electrónica y Comunicaciones/Postgrado en Física Fundamental,  
Universidad de Los Andes  
Correo Electrónico: [albornoz@ula.ve](mailto:albornoz@ula.ve)

#### RESUMEN

Las redes inalámbricas ad-hoc son sistemas de comunicaciones móviles que no requieren de una infraestructura fija para su funcionamiento ni de una administración centralizada, a diferencia de las redes inalámbricas convencionales. Una red ad-hoc puede ser vista como un sistema complejo con acoplamiento local y con movilidad; por esta razón, tareas que son rutinarias en redes fijas tales como enrutamiento, localización y sincronización no pueden ser enfrentadas con los algoritmos y las técnicas convencionales diseñados para tales redes. En este artículo se presenta una revisión de algunos trabajos representativos acerca de la aparición de fenómenos de auto-organización en redes ad-hoc y su relevancia para la operación de las mismas.

**Palabras Clave:** Redes ad-hoc, sistemas complejos, auto-organización

#### ABSTRACT

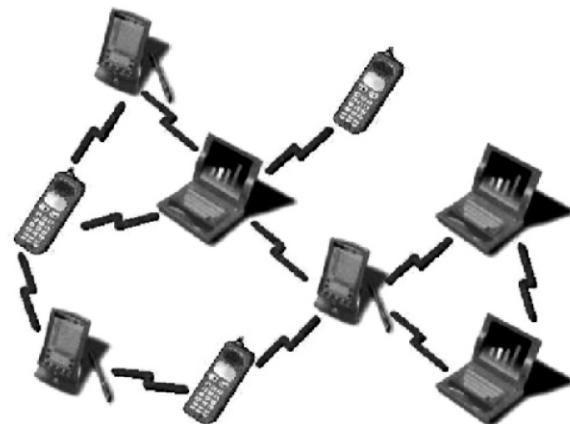
Wireless ad-hoc networks are mobile communications systems that, unlike conventional wireless networks, do not require fixed infrastructure or centralized management. An ad-hoc network can be seen as a complex system with local coupling and mobility; for these reasons, tasks which are routinely performed in fixed networks such as routing, synchronization and location cannot be performed with conventional algorithms and techniques designed for those networks. In this paper we present a review of several representative works about the emergence of self-organization phenomena in ad-hoc networks, and its relevance for the operation of such networks.

**Key Words:** Ad-hoc networks, complex systems, self-organization

## INTRODUCCIÓN

Las redes ad-hoc son sistemas de comunicaciones compuestos por nodos dotados de movilidad, los cuales se comunican entre sí a través de enlaces de radio sin la necesidad de una infraestructura fija o de una administración centralizada. Esta descripción es muy diferente a la de un sistema de comunicación inalámbrico convencional (como por ejemplo los sistemas de telefonía celular), en el que la comunicación entre dos nodos cualesquiera tiene lugar a través de un nodo central fijo (la estación base), la cual lleva a cabo las tareas de administración del sistema (ingreso y salida de nodos a la red, control de la potencia transmitida, sincronización, facturación, etc). En contraste, todos los nodos de una red ad-hoc están ubicados en un mismo nivel jerárquico, a pesar de que dichos nodos pueden ser muy diferentes en cuanto a poder computacional, memoria, potencia disponible para la transmisión, capacidad de las baterías y ancho de banda de transmisión. Entre los dispositivos que pueden ser nodos de una red ad-hoc se cuentan computadores portátiles, teléfonos celulares, asistentes digitales personales (PDAs), sensores, y otros productos con capacidad de comunicación inalámbrica, como se muestra en la figura 1. Las redes ad-hoc presentan desafíos especiales en cuanto a su administración, entendiéndose como administración la capacidad de adquirir y presentar la información relativa a la topología física y lógica de la red a través del tiempo. Debido a la diversidad en cuanto a los posibles tipos de nodos, no todos ellos pueden contribuir de igual forma a la consecución de este objetivo. Las restricciones impuestas por la capacidad de las baterías y por la movilidad de los nodos resultaran en frecuentes particiones de la red; asimismo ocurrirían casos en los que dos o tres particiones se unirían para formar una red mas grande; en ambos casos, el protocolo de administración debe ser capaz de adaptarse a estos cambios. Por otra parte, la calidad de la señal inalámbrica puede variar dramáticamente, de modo tal que los enlaces entre los nodos se verán interrumpidos de forma aleatoria. Por estas razones, la topología lógica de la red (vista como un grafo que representa la conectividad entre sus nodos) puede variar aún cuando la topología física se mantenga invariante. Adicionalmente, las redes ad-

hoc son frecuentemente desplegadas en ambientes hostiles y por ello están sujetas a intercepción, destrucción de los nodos, y posible penetración (e.g. un nodo es capturado y posteriormente usado por un enemigo), por lo que en su despliegue es necesario tomar en cuenta aspectos de seguridad (Shen *et. al*, 2003). Las aplicaciones de las redes ad-hoc son muchas y muy diversas: redes de control y adquisición de datos, redes en campus, redes de área personal, redes en situaciones de desastre o emergencia, escenarios de combate, sistemas de vigilancia y seguridad, sistemas de transporte inteligente, y juegos, entre otras.



**Figura 1. Una red ad-hoc.**

Bajo esta perspectiva, una red ad-hoc puede considerarse como un sistema complejo compuesto por un cierto número de agentes móviles acoplados entre sí a través de enlaces de radio; por lo tanto, muchas de las propiedades colectivas no-triviales asociadas con este tipo de sistemas (tales como, sincronización y transiciones de fase, entre otras) están presentes o pueden ser inducidas en una red ad-hoc.

Por otra parte, una red ad-hoc puede ser diseñada para que tenga las propiedades de otros tipos de redes complejas tales como las redes de pequeño mundo, las redes sociales, o ciertos tipos de redes biológicas.

En este trabajo presentamos una revisión de la bibliografía relacionada con los fenómenos de auto-organización en redes ad-hoc. Dicha revisión no es en manera alguna exhaustiva: nos limitamos a examinar aquellas publicaciones que ponen de relieve la relación entre las redes ad-hoc y los fenómenos que se dan en otros tipos de redes

complejas. El objetivo es proporcionar al lector una visión de las redes ad-hoc en la que estas son entendidas como un sistema complejo sujeto a muchos de los mecanismos y estructuras asociados a las redes estudiadas en el ámbito de la física o la biología.

### Rede Ad-Hoc como sistemas complejos

Dentro del contexto de este trabajo, un sistema auto-organizado consiste de un gran número de subunidades, las cuales pueden ser descritas en términos de reglas relativamente sencillas; la interacción entre dichas unidades conduce a la aparición de funcionalidades sofisticadas que no pueden ser explicadas en términos de las propiedades individuales. En el caso de las redes inalámbricas la auto-organización es inducida por protocolos que controlan el comportamiento global del sistema a través del conocimiento del flujo de la información entre sus partes.

Los algoritmos existentes en las redes convencionales funcionan en base a esta premisa; sin embargo, la mayoría de estos algoritmos dependen del conocimiento de la información global (por ejemplo, tablas de enrutamiento que describen todas las posibles rutas entre todos los nodos); en contraste, los algoritmos diseñados para aprovechar la auto-organización en redes ad-hoc se basan en paradigmas que apuntan a reducir la necesidad de la información global, obteniendo los efectos deseados en base a la información local o en base a métodos probabilísticos (Gerhenson y Heilighen, 2003).

La figura 2, ilustra estas ideas: a medida que se evoluciona desde un control centralizado hacia un sistema puramente auto-organizado, el grado de determinismo de los algoritmos disminuye, a la par que se incrementa la escalabilidad de la red.

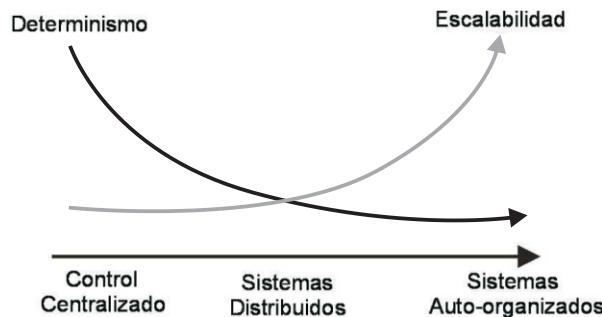


Figura 2. Escalabilidad vs. determinismo.

En este contexto, la escalabilidad se refiere a la capacidad de mantener el desempeño de la red a medida que se incorporan nuevos nodos (Dressler, 2006).

Entre las propiedades emergentes deseables en una red ad-hoc podemos mencionar las siguientes:

**Escalabilidad:** El desempeño de la red debe mantenerse a medida que se agregan nuevos nodos a la red. El intercambio constante de información asociado a los cambios de la topología de la red conlleva un importante uso del ancho de banda disponible; adicionalmente, factores tales como ruido e interferencia, acceso múltiple y desvanecimiento limitan aún más dicho ancho de banda. Esto es especialmente crítico conforme el número de nodos aumenta: asumiendo una red con  $N$  nodos dotados de antenas omnidireccionales, el ancho de banda disponible por nodo es  $1/\sqrt{N}$  (Cordeiro y Agrawal, 2006); las estrategias de auto-organización deben hacer un uso parsimonioso de este recurso. Adicionalmente, el intercambio de los mensajes de autenticación necesarios para garantizar la seguridad conforme nuevos nodos son incorporados también conlleva consumo de ancho de banda.

**Conservación de energía:** Los nodos deben tener la capacidad de apagarse o de reducir su consumo de energía cuando la situación lo permita; en consecuencia, un objetivo de las estrategias de auto-organización es prolongar el funcionamiento de la red mediante una administración adecuada de la energía de las baterías.

**Sincronización:** En muchas situaciones es necesario que los nodos de la red dispongan de una misma referencia de tiempo. Este es un problema resuelto en las redes cableadas convencionales, sin embargo es un reto vigente en las redes ad-hoc.

**Adaptabilidad:** El desempeño de la red debe mantenerse cuando los nodos o los enlaces entre los mismos dejen de operar por alguna razón (agotamiento de las baterías, destrucción del nodo, ocultamiento, etc.)

**Auto-reparación:** El sistema debe ser capaz de detectar, localizar y reparar fallas de manera

automática; estas fallas puede deberse a desaparición de nodos, pérdida momentánea de los enlaces, sobrecargas, etc.

Auto-optimización: El sistema debe tener la capacidad de escoger los parámetros óptimos de funcionamiento de la red en respuesta a los cambios en las condiciones ambientales (por ejemplo, el cambio en el número de nodos).

Pueden distinguirse cuatro categorías de mecanismos de auto-organización en las redes ad-hoc; todas ellas tratan de evitar el uso de la información global en favor de la información local o de los métodos probabilísticos (Dressler, 2006):

Mecanismos basados en la localización: Se emplea la posición geográfica de los nodos o su afiliación a un grupo (cluster) para desempeñar tareas de enrutamiento o sincronización.

- Información de la vecindad: Un cluster puede ser reducido a aquellos vecinos que están a un enlace de distancia de un nodo central. En ese caso, sólo se dispone de la información de la vecindad para realizar decisiones.
- Algoritmos probabilísticos: En muchos casos los métodos puramente probabilísticos ofrecen los mejores resultados, sobre todo en redes con alta movilidad.
- Algoritmos inspirados en la biología: Este tipo de algoritmos combina los métodos dependientes de la información de la vecindad con los métodos probabilísticos. Los objetivos son usualmente logrados a través del uso de lazos de realimentación.

En la siguiente sección examinaremos algunos ejemplos representativos de mecanismos y estructuras que representan la aparición de propiedades emergentes en redes ad-hoc. Estos ejemplos materializan los tipos de algoritmos anteriormente descritos, o combinaciones de ellos, y han sido escogidos entre algunos fenómenos que han recibido la atención de la comunidad científica por años.

## EJEMPLOS

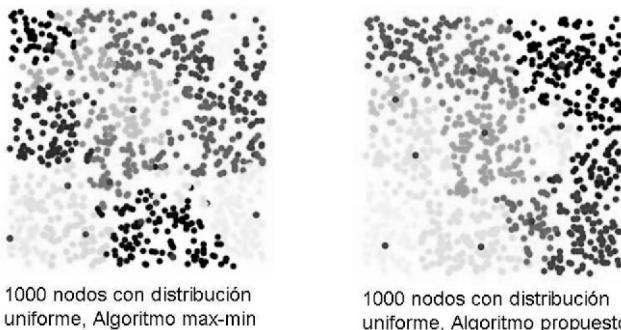
Formación de *Clusters*

El problema del enrutamiento en redes ad-hoc consiste en seleccionar una secuencia de nodos o *ruta* entre un nodo de origen y un nodo de destino, a través de una red cuya topología está cambiando en el tiempo. Esta particularidad hace que el diseño de protocolos de enrutamiento en redes ad-hoc sea particularmente difícil. Existen dos tipos de estrategias básicas que pueden seguirse: proactivas y reactivas. Las estrategias proactivas mantienen tablas de enrutamiento que contienen las rutas a cada uno de los nodos de la red; cada cierto tiempo esta información requiere ser actualizada, generando tráfico que consume ancho de banda; adicionalmente, el cálculo de las tablas consume capacidad de procesamiento. Las estrategias reactivas, en contraste, determinan las rutas a medida que son necesitadas, sin embargo el tiempo requerido por el proceso de búsqueda puede ser inaceptable para la operación de la red. Una solución es el enrutamiento jerárquico, en el que los nodos geográficamente cercanos son agrupados en clusters para posteriormente emplear un esquema de enrutamiento híbrido: proactivo en el interior del cluster y reactivo entre diferentes clusters.

Las estrategias de organización de clusters que emplean un diámetro fijo del cluster o un número fijo de nodos no son adecuadas para redes ad-hoc, ya que generan un gran número de cabezas de cluster, en tanto que aquellas estrategias basadas en el grado de un nodo resultan en un elevado número de cambios de cabezas de cluster cuando cambia la topología de la red; por su parte, las estrategias basadas en criterios de movilidad pueden resultar en nodos aislados. Mitton *et al.* 2004, proponen una métrica para la organización de los clusters basada en la densidad de los nodos, así como, una metodología heurística para la selección de las cabezas de cluster. La metodología propuesta asegura una distribución apropiada de la carga y favorece la reelección de los *clusterheads*, reduciendo el tráfico asociado a la aparición de nuevas cabezas de cluster. La definición de la densidad empleada por los autores toma en cuenta el grado de conectividad de los nodos en función del grado del nodo y del número de aristas entre sus vecinos.

La figura 3, muestra una comparación entre los resultados producidos por el algoritmo max-min [1] y el algoritmo propuesto. Las redes simuladas en el estudio cubren un área de 1 km<sup>2</sup>, y el rango de los

enlaces entre nodos. El algoritmo max-min resulta en la presencia de más de una cabeza por cluster, en tanto que la estrategia de Mitton *et al.* 2004, resulta en una distribución homogénea de clusters y *clusterheads*: los clusters agrupan a nodos con alta conectividad para favorecer el tráfico dentro de los clusters, mientras que los *clusterheads* tienden a aparecer en el centro de cada cluster.



**Figura 3. Comparación entre algoritmos de formación de clusters (según Mitton *et al.* 2004)**

Un trabajo reciente que considera mecanismos de formación de clusters es el de Meng *et al.* 2009, en el cual se estudia la relación entre la resistencia de una red a la pérdida de nodos y la formación de clusters. Otro interesante trabajo de reciente data es el de Leng *et al.* 2009, en el que se propone una estrategia de formación de clusters que selecciona las cabezas de cluster en base a su movilidad y a su conectividad; esta estrategia incrementa el tiempo de vida de las cabezas de cluster en un 50 % y mantiene el costo de enrutamiento por debajo del necesitado por otros algoritmos semejantes.

#### Enrutamiento basado en propagación de rumores

Muchos protocolos de enrutamiento en redes ad-hoc están basados en alguna variante del mecanismo de inundación, en el que todos los nodos anuncian las rutas a las que tienen acceso; esto hace que muchos mensajes sean propagados innecesariamente, consumiendo valioso ancho de banda. Zygmunt *et al.* 2006, proponen una estrategia de enrutamiento basada en el mecanismo de propagación del rumor en una red compleja, la cual reduce hasta en un 35 % el número de mensajes necesarios en comparación con el mecanismo de inundación.

La propagación de un rumor en una red es comparable al problema de la percolación en un medio

poroso, donde cada poro es ocupado con una cierta probabilidad  $p$ . El fenómeno resultante exhibe comportamiento bimodal: existe una cierta probabilidad crítica  $p_c$  por encima de la cual el fluido forma un cluster percolante que ocupa la mayor parte del material; para  $p < p_c$  el fluido tenderá a formar muchos clusters pequeños y aislados. En el caso de una red (regular o aleatoria) también se observa este tipo de criticalidad: se asume que cada nodo repite el rumor con una probabilidad  $p$ . Sea  $\theta^s(p)$  la fracción de ejecuciones del algoritmo en las que el rumor no se extingue, y sea  $\theta^r(p)$  la fracción de nodos que reciben el mensaje cuando el rumor no se extingue. El rumor se extinguirá rápidamente en una fracción  $1 - \theta^s(p)$ , y en la fracción  $\theta^r(p)$  de ejecuciones en la que el rumor no se extingue, el rumor alcanzará una fracción  $\theta^r(p)$  de los nodos que, en muchos casos de interés, será cercana a 1.

En el protocolo básico de enrutamiento por propagación de rumor empleado por Zygmunt *et al.* 2006, un nodo fuente emite un pedido de ruta con probabilidad 1; cuando otro nodo recibe este pedido, éste es repetido con probabilidad  $p$  a los nodos vecinos, y descartado con probabilidad  $1 - p$ . Sin embargo, si la fuente tiene pocos vecinos, existe la posibilidad de que el rumor se extinga. Para evitar esto se emplea el protocolo denominado GOSSIP1( $p, k$ ): cuando un nodo recibe un pedido de ruta, el mensaje es repetido con probabilidad 1 durante los primeros  $k$  saltos, para después continuar repitiéndose con probabilidad  $p$ .

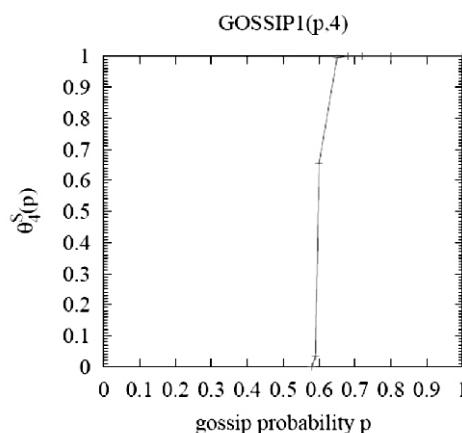
La figura 4 muestra  $\theta^s(p)$  vs.  $p$  para GOSSIP1( $p, 4$ ) en una red aleatoria con  $10^6$  nodos ubicada en una retícula de tamaño  $1000 \times 1000$ . Se observa una clara transición de fase: cuando  $p < 0,59$  el rumor se extingue en casi todas las ejecuciones. Conforme  $p$  es incrementado  $\theta^s(p)$  crece rápidamente, pasando de 0 en  $p=0,59$  a casi 1 en  $p=0,65$ . Este tipo de transiciones de fase en redes inalámbricas ha sido previamente reportado por Krishnamachari *et al.* 2003 y Sasson *et al.* 2003. Es interesante notar que el problema de la propagación de un rumor en una red ad-hoc puede equipararse al problema de percolación en una red aleatoria con nodos móviles. Una interesante variante del mecanismo de enrutamiento por rumor es propuesta por Beraldí 2008, en la que la probabilidad con la que se repiten los pedidos de ruta es variable pero suficiente para que el proceso de búsqueda sea sostenible. En comparación con el mecanismo de enrutamiento por inundación, esta estrategia resulta en

<sup>1</sup>Las cabezas de cluster o (*clusterheads*) son nodos responsables por la administración de la comunicación entre los nodos pertenecientes a un cluster, así como del enrutamiento entre no dos asociados a diferentes clusters. es de 0.1 km. Los puntos azules representan las cabezas de cluster, en tanto que los demás colores identifican a los distintos clusters.

una disminución de un 80 % en el costo de enrutamiento.

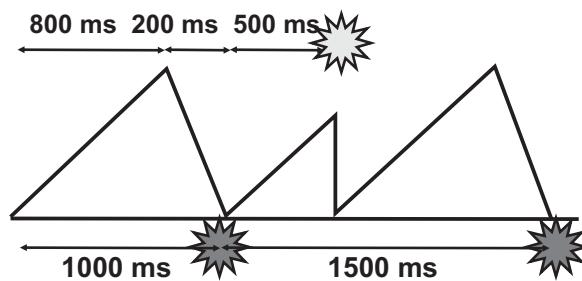
### Sincronización

Muchas veces existe la necesidad de que los nodos actúen de forma coordinada; por ejemplo, cuando se requiere fusión de datos, actuación coordinada o eficiencia en el consumo de energía. Los protocolos convencionales de sincronización tales como NTP o *Reference Broadcast Synchronization* tienen un desempeño pobre en una red ad-hoc, o son de implementación prohibitiva. Tyrrell *et al.* 2006 han explorado estrategias de sincronización en redes ad-hoc inspiradas en sistemas biológicos; en particular, su estrategia está inspirada en el trabajo de (Miroollo y Strogatz, 1991) en el que se reporta la sincronización espontánea en enjambres de *Pteroptyx cribellata*, una luciérnaga nativa del sudeste asiático. El enjambre puede ser modelado como una red de osciladores acoplados por pulsos; la interacción entre cada oscilador ocurre a través de un pulso luminoso que es percibido por los osciladores vecinos.



**Figura 4. Fracción de nodos a los que llega el rumor en función de  $p$ . (según Zygmunt *et al.* 2006)**

La figura 5 muestra dos osciladores de pulsos acoplados: en la figura la función de fase de un oscilador aislado crece linealmente hasta alcanzar un cierto umbral en  $t = 800$  ms; a partir de este instante la fase disminuye linealmente por un período de 200 ms hasta que ésta alcanza su de nuevo su valor inicial; en ese momento el oscilador se dispara, emitiendo un pulso de luz. Sin embargo, si el oscilador percibe el disparo de un oscilador vecino (por ejemplo en  $t = 1500$  ms) la fase del oscilador regresa prematuramente a su valor inicial, reiniciándose el ciclo de oscilación.



**Figura 5. Efecto del acople en un oscilador de pulsos.**

(Miroollo y Strogatz, 1990) demuestran que una red de estos osciladores converge hacia un estado de sincronización cuando existe acople global. Este esquema de sincronización puede aplicarse a una red inalámbrica haciendo que cada nodo emita una ráfaga de pulsos de duración  $T_{tx}$  cuando el correspondiente oscilador se dispara. Aplicando estas ideas, Tyrrell *et al.* 2006, obtienen sincronización en una red ad-hoc con 30 nodos tomando en cuenta los retardos asociados a la propagación y procesamiento de una señal de radio. Una desventaja de esta estrategia es que requiere acople global entre los nodos, lo cual no es posible si la red supera cierto tamaño. Otras estrategias de sincronización en redes ad-hoc han sido consideradas por Yang *et al.* 2008 y Sheu *et al.* 2008.

### Redes Sociales y Redes Ad-Hoc

Un elemento importante en el diseño de buenas simulaciones de redes ad-hoc es la selección del patrón de movilidad de los nodos: los modelos comúnmente empleados se basan en procesos de paseo aleatorio (*random walk*), una suposición muy simple y poco realista. Debe considerarse, sin embargo, que una red ad-hoc es una red social ya que los nodos son portados por seres humanos, y que los patrones de movimiento de las personas están influenciados por las relaciones sociales. Esto puede ser modelado matemáticamente con un alto grado de precisión (Musolesi *et al.* 2005).

Los modelos de movilidad más ampliamente usados involucran movimiento aleatorio de los nodos. El modelo más simple, el *Random Walk Mobility Model*, es equivalente al movimiento browniano de los nodos. Una versión ligeramente mejorada de este modelo es el *Random Way-Point Mobility Model*, en el cual se introducen pausas en el movimiento asociadas

a cambios en la dirección y velocidad de los nodos (Bai y Helmy, 2004). Estos modelos son inexactos ya que no hay manera de evaluar hasta qué punto representan la realidad: específicamente, estos modelos generan trazas con una duración del contacto entre nodos y con un tiempo entre contactos que distan mucho de las extraídas de escenarios reales. Es fácil apreciar que la conducta representada por estos modelos no es humana: para modelar tal conducta, es necesario tomar en cuenta la estructura de las interacciones entre las personas que portan los dispositivos, la cual puede representarse formalmente en términos de redes sociales.

Las redes sociales son fundamentalmente diferentes a otros tipos de redes complejas. Aún cuando las redes sociales presentan estructura de pequeño mundo, el tamaño y cantidad de los clusters es mayor que en otras redes; esto es debido al hecho de que los seres humanos tienden a organizarse en comunidades.

Musolesi y Mascolo, (Musolesi y Mascolo desarrollaron un modelo de movilidad basado en redes sociales. En este modelo el grado de interacción entre dos personas es representado por un número en el rango  $[0,1]$  (figura 6); en consecuencia, una red social de  $n$  personas es representada por una matriz de interacción  $M$  de tamaño  $n \times n$ . La información necesaria para generar la matriz  $M$  puede obtenerse de un estudio sociológico o de modelos matemáticos capaces de reproducir las características de las redes sociales reales. Una matriz de conectividad  $C$  es generada a partir de la matriz de interacción  $M$ : si el

valor de un elemento  $m_{ij} \in M$  de la matriz  $C$ , de lo contrario se escribe un 0. A su vez, la matriz de conectividad es empleada para detectar comunidades empleando el algoritmo desarrollado por Newman y Girvan, 2004. Las comunidades así detectadas son asociadas aleatoriamente a ubicaciones en una retícula, en las que se ubican los grupos de nodos que corresponden a cada comunidad. De esta manera el modelo queda establecido, y los nodos se desplazan entre las comunidades a partir de reglas de atracción social descritas a continuación.

Un cierto número de nodos está ubicado en cada ubicación  $S_{pq}$  de la retícula en el tiempo  $t$ . Se establece la atractividad social de cada ubicación como una medida de su importancia en términos de la relación social con un determinado nodo. La importancia social es calculada evaluando la intensidad de las relaciones con los nodos que se mueven hacia la ubicación  $S_{pq}$ . Más formalmente, la atractividad social  $A_{p,qi}$  de la ubicación  $S_{pq}$  hacia el nodo  $i$  será

donde  $w$  es la cardinalidad de  $C_{Spq}$ , esto es, el número de nodos asociado a la ubicación  $S_{pq}$ . En otras palabras, la atractividad social de una ubicación es definida como la suma de los indicadores de interacción que representan las relaciones entre  $i$  y los nodos que pertenecen a esa ubicación particular, normalizada por el número total de nodos asociados a dicha ubicación. El modelo permite que un nodo se mueva de acuerdo a dos mecanismos alternos, uno determinístico en la selección de la ubicación que ejerza la mayor atractividad, y otro probabilístico

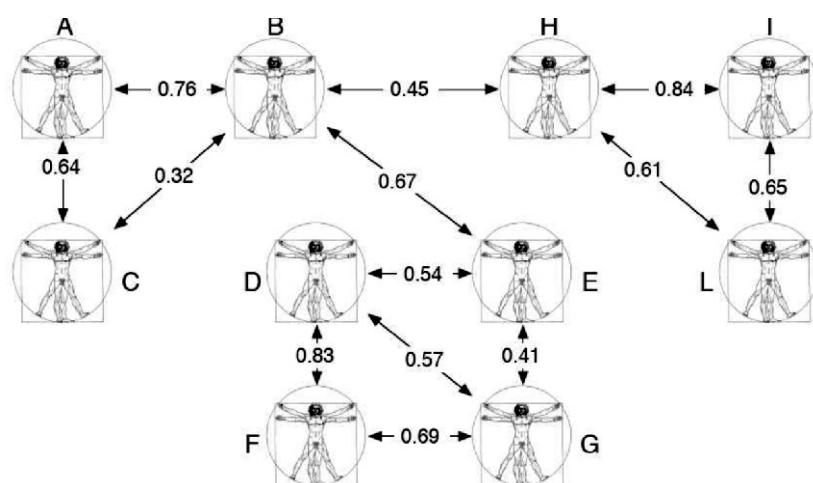


Figura 6. Un ejemplo de una red social (según Musolesi y Mascolo, 2004)

basado en la probabilidad de que se seleccione una ubicación en forma proporcional a su atractividad. El modelo fue validado empleando información proveniente del estudio realizado por Chaintreau *et al.* 2005; el modelo propuesto genera datos que son consistentes con los datos reales tanto en la duración de los contactos entre nodos como en el tiempo entre contactos.

Una interesante aplicación de las redes sociales en el ámbito de las redes ad-hoc es la planteada por Wang *et al.* 2009, en la que la estructura de una red social es utilizada como base para una métrica para detectar comportamientos anómalos en nodos móviles, previniendo de esta forma intrusiones en la red. La estructura social también ha sido usada en el enrutamiento para la diseminación de mensajes por publicación/suscripción en redes ad hoc (Dhillon *et al.* 2007)

### Auto-organización usando mecanismos inspirados por la biología

Muchos sistemas biológicos son los sistemas complejos por excelencia: ellos están constituidos por un gran número de unidades autónomas que generan comportamientos de adaptación eficientes a través de la auto-organización; más aún, los sistemas biológicos son robustos ante las perturbaciones internas o la pérdida de unidades, poseen la capacidad de sanar, y son capaces de sobrevivir y evolucionar en una gran variedad de ambientes. Estas propiedades han servido como fuente de inspiración para el diseño de mecanismos de auto-organización en sistemas complejos tecnológicos como las redes ad-hoc. La meta es tomar ventaja de las similitudes entre la estructura de los organismos vivientes y la de las redes ad-hoc, diseñando sistemas con la capacidad de configurarse, administrarse, y repararse automáticamente (Dresller, 2005a)

Un interesante ejemplo de la adaptación de mecanismos biológicos en el ámbito de las redes ad-hoc es Ant-Hoc Net (Di caro *et al.* 2005), una estrategia de enrutamiento basada en el comportamiento de las colonias de hormigas en la búsqueda de alimento. Este es un caso de un proceso de aprendizaje estigmérico<sup>2</sup> que ocurre a través de la feromona segregada por estos insectos.

Las hormigas que recorren las rutas existentes entre el hormiguero y una fuente de alimento marcan estas rutas con feromona, dirigiéndose de preferencia hacia caminos con alta concentración de esta substancia. Las rutas más cortas son recorridas más rápidamente y con mayor frecuencia, por lo que

son marcadas con mayor intensidad. Tales rutas atraen más hormigas, lo que a la vez aumenta el nivel de feromona. La feromona es volátil, por lo que desaparece de aquellas rutas que no son usadas con frecuencia. El efecto neto es el de un proceso de reforzamiento de aprendizaje distribuido que permite que la mayoría de las hormigas emplee la ruta más corta.

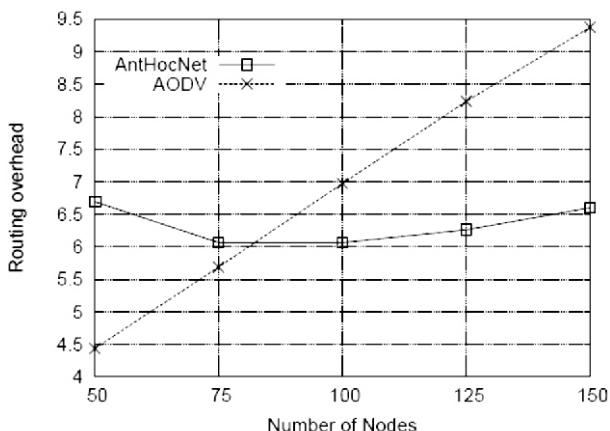
En Ant-Hoc Net la información acerca de las rutas es obtenida a partir de un proceso estigmérico usando agentes generados por los nodos, los cuales tienen como tarea evaluar una ruta hacia un destino. Un agente que viaja desde una fuente hasta un destino colecta información acerca de la calidad de la ruta (por ejemplo, el retardo asociado a la misma); al regresar hacia la fuente, actualiza la información de enrutamiento en los nodos intermedios; esta información es mantenida en la forma de tablas en cada nodo.

La tabla de enrutamiento  $T^i$  en el nodo  $i$  es una matriz, donde cada elemento  $T^i \in R$  de la tabla representa un estimado de la calidad de la ruta desde  $i$  a través del vecino  $n$  hasta el destino  $d$ . Los elementos de la tabla juegan el papel de variables estigméricas en el proceso de aprendizaje: un agente que evalúa una ruta hacia un destino lleva a cabo un proceso de decisión estocástica de enrutamiento en cada nodo, asignando una mayor probabilidad a las rutas con una mayor calidad, mientras que un agente que regresa a la fuente actualiza las tablas, influenciando en consecuencia las decisiones de otros agentes. Es por esta razón que a las tablas se les denomina "tablas de feromona", y los estimadores de la bondad de la ruta "valores de feromona".

Los paquetes de datos son enrutados estocásticamente: el algoritmo escoge con mayor probabilidad aquellos enlaces asociados a altos valores de feromona. El resultado es un balanceo automático de la carga en la red. Ant-Hoc Net es un algoritmo híbrido: es reactivo en el sentido de que los nodos sólo adquieren información acerca de aquellos otros nodos con los que se están comunicando, pero a la vez es proactivo ya que los nodos tratan de mantener y mejorar la información de enrutamiento.

$$A_{p,q_i} = \frac{\sum_{j \in C_{S_{p,q}}} m_{i,j}}{w} \quad (1)$$

<sup>2</sup> *Estigmérica* es una forma de control distribuido basada en la comunicación indirecta entre agentes que modifican su entorno; este comportamiento resulta en una coordinación global de las acciones de los agentes.



### Comportamiento de pequeño mundo en redes ad-hoc

Sea una red descrita por un grafo  $G$ . Se define la longitud característica  $L$  de red como el número promedio de saltos entre dos nodos cualesquiera. Asimismo, se define el coeficiente de agrupamiento o clustering  $C_n$  como la relación entre el número de aristas que existente entre el nodo  $n$  y sus vecinos, y el número total de aristas posibles entre los vecinos de  $n$ .

El fenómeno de pequeño mundo consiste en una reducción drástica en la longitud característica acompañado de valores altos del coeficiente de agrupamiento; esta reducción ocurre cuando algunos nodos son aleatoriamente recableados con conexiones de largo alcance. La estructura de pequeño mundo fue inicialmente estudiada en redes relacional (Milgram, 1967; Wang y Man, 2009); en contraste, el fenómeno no se observa en redes espaciales, en las que hay restricciones de distancia entre nodos: en tales redes los valores de la longitud característica y del coeficiente de agrupamiento son similares.

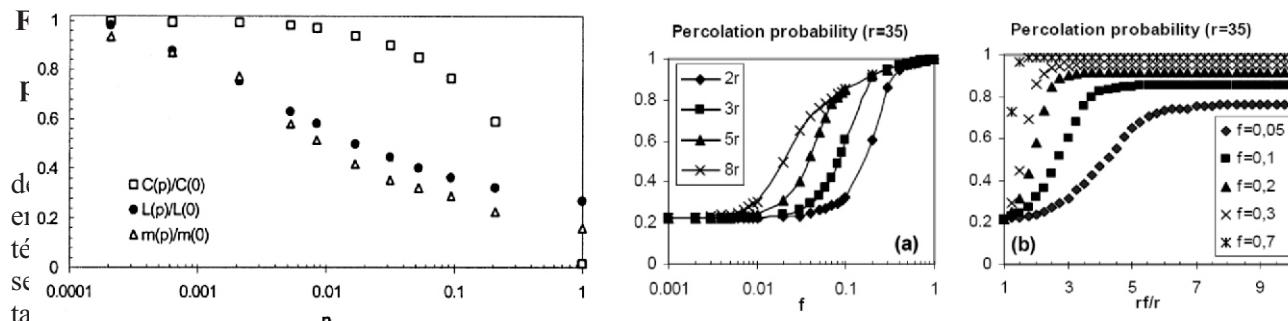
Las redes de comunicaciones inalámbricas pertenecen a la categoría de los grafos espaciales, en los que las aristas entre los nodos dependen del alcance de los enlaces de radio.

En estas redes existen altos valores del índice de agrupamiento debido a la localidad de los enlaces (muchos de los vecinos de un nodo son a su vez vecinos entre sí); además, debido a esta localidad, es de esperarse un alto valor de la longitud característica. Sin embargo, la estructura de pequeño mundo puede ser inducida añadiendo de forma aleatoria algunos enlaces con longitudes del orden de una pequeña fracción del diámetro de la red (Helmy, 2003).

Estos enlaces funcionan como atajos entre las cabezas de cluster, a través de los cuales es canalizada la información acerca de los nodos en los clusters a través de las conexiones locales. El reducir la distancia promedio de las rutas tiene una ventaja adicional: (Watts y Strogatz, 1998) demostraron que una condición fundamental para la escalabilidad de una red es el mantener la longitud promedio de las rutas pequeña a medida que la red crece.

Helmy 2003, realizó simulaciones en una red compuesta por 1000 nodos en una área de  $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ ; en dicha red se realizó un recableado aleatorio entre los nodos con una cierta probabilidad  $p$ ; para cada valor de  $p$  se determinaron la longitud promedio de las rutas  $L(p)$ , la longitud máxima de las rutas  $m(p)$ , y el coeficiente de agrupamiento  $C(p)$ ; estas cantidades fueron normalizadas con respecto a  $L(0)$ ,  $m(0)$  y  $C(0)$ , valores obtenidos para  $p=0$ . La figura 8 muestra los resultados obtenidos: se observa una clara diferencia entre los efectos del recableado en la longitud promedio de las rutas y en el coeficiente de agrupamiento: la reducción en la longitud promedio ocurre drásticamente para  $0,002 < p < 0,2$ ; valores mayores de  $p$  no contribuyen gran cosa a esta reducción.

Por ejemplo, para obtener una reducción del 25 % en  $L$  basta con hacer  $p \sim 0,002$ ; en contraste, para obtener una reducción de un 25 % en  $C$  se requiere  $p \sim 0,09$ , lo que significa una diferencia en  $p$  de casi dos órdenes de magnitud. Estos resultados sugieren que es posible disminuir drásticamente la longitud media de las rutas sin afectar la estructura de la red recableando aleatoriamente unos pocos nodos.



1000 nodos en una área de  $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ , cada uno de los cuales tiene un alcance  $r = 35 \text{ m}$ ; la red resultante es desconectada. Se introducen en la red una fracción  $f$  de 'nodos especiales' con enlaces de largo alcance  $r=r_f$ . La probabilidad de percolación es calculada para cada realización de la red y promediada sobre 100 realizaciones. La figura 9(a) muestra la probabilidad de percolación en función de la fracción  $f$  para  $r_f = 2r, 3r, 5r$  y  $8r$ : se verifica que la conectividad de la red aumenta en función de  $f$  para diferentes valores de  $r_f$ . Para  $f < 0.01$  la red permanece desconectada sin importar el valor de  $r_f$ ; por otra parte, para  $f > 0.2$  se tiene una red casi completamente conectada, la cual no muestra una mejora significativa con posteriores incrementos en  $f$ . Este resultado sugiere que hay un límite superior en el número de 'nodos especiales' requeridos para transformar una topología desconectada en una conectada. La figura 9(b) muestra la probabilidad de percolación en función de la razón  $r/r_f$  para  $f = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3$  y  $0.7$ . Se observa que para todos los valores de  $f$  hay un valor crítico de  $r_f$  para el que la conectividad experimenta un aumento drástico; incrementos posteriores en  $r_f$  no tienen gran efecto sobre la conectividad.

La estructura de pequeño mundo en redes ad hoc también ha sido estudiada por Filiposka *et al.* 2007 y Chen *et al.* 2008. Este último trabajo es particularmente interesante al considerar la relación entre 'la inclusión de "nodos especiales" de largo alcance y la emergencia de criticalidad autoorganizada de la red.

alcance y la emergencia de criticalidad auto-organizada de la red.

## CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo es el de presentar algunos ejemplos representativos de mecanismos y estructuras que conducen a auto-organización en redes ad-hoc. Estas redes constituyen un ejemplo de sistema complejo tecnológico susceptible de ser estudiado a partir de las herramientas empleadas por la física y la matemática. En consecuencia, muchos de los fenómenos y estructuras asociados a la auto-organización en redes complejas pueden observarse o incorporarse a las redes ad-hoc.

En este trabajo hemos examinado algunos de estos fenómenos; sin embargo, vale la pena mencionar que hay otras interesantes instancias de auto-organización en redes ad-hoc que no fueron mencionadas como los mecanismos para asegurar cooperación entre nodos (Michiardi *et al.* 2009; Buttán y Hubaux, 2003; Huang *et al.* 2008; Wang *et al.* 2008), sistemas inmunitarios artificiales (Sarafijanovic y Le Boudec, 2004; Byrski y Carvalho, 2008; Schhaust y Sczcerbicka, 2008), mecanismos de reacción-difusión (Durvy y Thiran, 2005; Hyodo *et al.* 2007; Yoshida, 2008) y redes auto-reparables (Elliot y Heile, 2000; Gui y Mohapatra, 2003; Feng y Zhou, 2006; Elhadef *et al.* 2007), entre otros que serán explorados en una futura revisión exhaustiva del tema.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AMIS, A.; PRAKASH, R.; VUONG, T.; HUYNH, D. Max-min dcluster formation in wireless ad-hoc networks. Proceedings of IEEE INFOCOM, Tel Aviv, Israel. Vol 1:32-41, 2000.
- BAI, F. y HELMY, A. A survey of mobility modeling and analysis in wireless ad-hoc networks. Wireless Ad Hoc and Sensor Networks, Capítulo 1, pp. 1-30. Kluwer Academic Publishers, USA, 2004.
- BERALDI, R. The polarized gossip protocol for path discovery en MANETs. Ad Hoc Networks. pp. 67-79. 2008.
- BUTTA, L.; HUBBAUX, J. Stimulating cooperation in self-organizing mobile ad hoc networks. Mobile Networks and Applications. pp. 579-592, Springer Netherlands, Amsterdam. 2003.
- BYRSKI, A. y CARVALHO, M. Agent-based immunological intrusion detection system for mobile ad-hoc networks. Proceedings of the 8th International Conference on Computational Science, Part III, pp. 584-593, Krakow, Poland, June 2008.
- CAVALCANTI, D.; AGRAWAL, D.; KELNER, J. y SADOK, D. Exploiting the small-world effect to increase connectivity in wireless ad hoc networks. Lecture Notes on Computer Science, 3124, 1611, 2004.
- CHINTREAU, A.; HUI, P.; CROWFORT, J.; DIOT, C.; GASS, R. y SCOTT, J. Pocket-switched networks: realworld mobility and its consequences for opportunistic forwarding. Technical Report UCAM-CL-TR-617, University of Cambridge, Computer Laboratory, February. 2005.
- CHEN, Y.; AN, J. y LIU, H. Self-organized criticality in ad hoc communication net-works having small-world property. 4th International Conference on Wireless Communication, Networking and Mobile Computing. pp 1-4. Dalian, China, 2008.
- CORDEIRO, C. y AGRAWAL, D. Ad Hoc & Sensor Networks: Theory and Applications. Capítulo 1, pp 1-17, World Scientific Publishing, USA, 2006.
- COSTA, P.; MASCOLO, C.; MUROLESI, M. y PICCO, G. Socially-aware routing for publish-suscribe in delay-tolerant ad-hoc networks. IEEE Journal on Selected Areas in Telecommunications, 26(5):748.2008.
- DHILLON, S.; ARBONA, X. y VAN MIEGHEN, P. Ant routing in mobile ad-hoc networks. Proceedings of the 3rd International Conference on Networking and Services, p. 67, Athens, Greece, 2007.
- DI CARO, G.; DUCATELLE, F.; GIAMBARDELLA, L. Swarm intelligence for routing in mobile ad hoc networks. Proceedings of the IEEE Swarm Intelligence Symposium (SIS 2005), pp 76-83, Pasadena, CA, USA, June. 2005.
- DRESSLER, F.; KRUGER, B.; FUCHS, G. y GERMAN, R. Self-organization in sensor networks using bio-inspired mechanisms. Proceedings of 18th ACM/GI/ITG International Conference on Organic Computing, Innsbruck, Austria. 2005.
- DRESSLER, F. Self-organization in ad-hoc networks: overview and classification. Technical Report 02/06, University of Erlangen, Department of Computer Science, Erlangen, Germany. 2006.
- DURVY, M. y THIRAN, P. Reaction diffusion based transmission patterns for ad hoc networks. Proceedings of IEEE INFO-COM 2005. 24th Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies, Vol (3):2195-2205, Miami, FL, USA, 2005.
- ELHADEF, M.; BOUKERCHE, A. y ELKADIKI, H. An adaptive fault identification protocol for an emergency/rescue- based wireless and mobile ad-hoc network. IEEE International Parallel and Distributed Processes Symposium(IPDPS 2007), pp 1-8, Long Beach, CA, USA, March. 2007.
- ELLIOT, C., HEILE, B. Self-Organizing, Self-Healing wireless networks. IEEE Aerospace Conference Proceedings, Vol. 1, pp 149-156, Big Sky, MT, USA, 2000.
- FENG, J. y ZHOU, H. A self-repair algorithm for ad-hoc on demand distance vector routing. International Conference on Wireless Communication, Networking and Mobile Computing (WiCOM 2006), pp 1-4, Wuhan, China, September 2006.

- FILIPOSKA, S.; TRAJANOV, D. y GRNAROV, A. Analysis of small world phenomena and group mobility in ad hoc networks. Innovative algorithms and techniques in automation, Industrial Electronics and Telecommunications, pp 425-430, Springer. Berlin. 2007.
- GERHENSON, C. y HEYLIGHEN, F. When can we call a system self-organizing? Lecture Notes on Computer Science, 2801, 606, 2003.
- GUI, C. y MOHAPTRA, P. A Self-healing and optimizing routing technique for ad hoc networks. ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing (MOBIHOC), pp 279-290, Annapolis, MD. USA. 2003.
- HELMY, A. Small world in wireless networks. IEEE Communication Letters, 7(10). 490. 2003.
- HUANG, C.; WANG, F.; HUANG, B. y MO, Y. Preventing natural and malicious network partition in ad hoc networks using cooperative healing cell. IEEE International Conference on Communications Workshop (ICC 2008), pp 158-163, Beijing, China. May 2008.
- HYODO, K.; WAKAMIYA, N.; ETSUSHI, N.; MASUYAKI, M.; YUKI, K. y KENTARO, Y. Experiments and considerations on reaction-diffusion based pattern generation in a wireless sensor network. IEEE International Symposium on a World of Wireless, mobile, and multimedia networks (WoWMoM 2007), pp 1-6, Helsinki, Finland, June 2007.
- KAMALI, S. y OPATRNY, J. A positionbased ant colony routing algortihm for mobile ad hoc networks. Journal of Networks. 3(4), 31, 2008.
- KRISHNAMACHARI, B.; WICKER, C. y BEJAR, R. Phase transition phenomena in wireless ad hoc networks. IEEE Global Telecommunications Conference, Vol. 5, pp. 2921-2925, San Antonio, TX, USA, 2001.
- LENG, S., ZHANG, Y.; CHEN, H. ; ZHANG, L. y LIU, K. A novel k-hop compound metric based clustering scheme for ad hoc wireless networks. IEEE transactions on wireless communications, 8(1):367. 2009.
- MENG, L.; ZHOU, K.; HUA, J.; XU, Z. y LUO, J. Connection stability analyze based on dynamic clustering algorithm for mobile ad-hoc networks. WRI International Conference on Communications and Mobile Computing, Vol.2, pp 97-100, Kunmin, China, January 2009.
- MICHIARDI, P.; MOLVA, R. y CORE, A. collaborative reputation mechanism to enforce node cooperation in mobile ad hoc networks. Advanced Communications and Multimedia Security (IFIP International Federation for Information Processing), pp. 107-121, Springer, Berlin, 2002.
- MILGRAM, S. The small world problem. Psychology Today, 2, 60, 1967.
- MIROLLO, R. y STROGATZ, S. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. SIAM J. Appl. Math., 50, 1645, 1990.
- MITTON, N.; BUSSON, A. y FLEURY, E. Self-organization in large-scale ad-hoc networks. Third Annual Mediterranean Ad-Hoc Networking Workshop, Bodrum, Turkey, June 2004.
- MUSOLESI, M. y MASCOLO, C. An ad hoc mobility model founded on social network theory. Proceedings of the 7th ACM International Symposium on Modeling, Analysis and Simulation of Wireless and Mobile Systems, pp 20-24, Venice, Italy. 2004.
- MUSOLESI, M.; HAILES, S. y MASCOLO, C. Social networks based ad hoc mobility models. Proceedings of the 3rd UK-UbiNet Workshop, Bath, UK. 2005.
- NEWMAN, M. y GIRVAN, M. Finding and evaluating community structure in net-works. Phys. Rev. E, 69(2):026113, 2004.
- SARAFIJANOVIC, S. y LE BOUDEC, J. An artificial immune system for misbehavior detection in mobile ad-hoc networks with virtual thymus, clustering, danger signal, and memory detectors. Lecture Notes in Computer Science, 3239, 342, 2004.
- SASSON, Y.; CAVIN, D. y SCHIPER, A. Probabilistic broadcast for flooding in wireless mobile ad hoc networks. IEEE Wireless Communications and Networking, 2, 1124. 2003.
- SCHAUST, S.; SCZCERBICKA, H. Artificial immune systems in the context of mis- behavior detection. Cibernetics and Systems, 39(2):136. 2008.

- SHEN, C.; SRISATHAPORNPHAT, C. y JAIKAEAO, C. An adaptive management architecture for ad-hoc networks. *IEEE communication magazine*, 41(2), 108. 2003.
- SHEU, J.; HU, W. y LIN, J. Ratio-based time synchronization protocol in wireless sensor networks. *Telecommunication Systems*, 39(1), 25, 2008.
- TYRRELL, A.; AUER, G. y BETTSTETTER, C. Firefly synchronization in ad hoc networks, Conference Paper, 3rd MiNE- MA Workshop, Leuven, Belgium, February. 2006.
- WANG, L., LIU, B.; GOECKEL, D.; TOWSLEY, D. y WESTPAHL, C. Connectivity in cooperative wireless ad hoc networks. *Proceedings of the 9th ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing*, pp 121-130, Hong Kong, China, May 2008.
- WANG, W.; MAN, H. y LIU, Y. An intrusion detection system in ad hoc networks: a social network analysis approach. *IEEE 6th Consumer Communications and Net-working Conference*, pp 1-5, Las Vegas, NV, USA, 2009.
- WATTS, D. y STROGATZ, S. Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 393, 440, 1998.
- WATTS, D. *Small Worlds, the Dynamics of Networks Between Order and Randomness*. Capítulo 2, pp 11-40, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1999.
- YANG, H.; LI, J. y YINGYONG, J. Time synchronization protocol for ad hoc network based on delay probing. *Journal of Computer Applications*, 28(12), 3041, 2008
- YOSHIDA, A.; YAMAGUCHI, T.; WAKAMIYA, N. y MURATA, M. Proposal of reaction diffussion based congestion control method for wireless mesh networks. *10th International Conference on Advanced Communication Technology*, (ICACT 2008), Vol. 1, pp 455-460, Gangwon-Do, South Korea, February 2008.
- ZYGMUNT, H.; HALPERN, J. y LI, L. Gossip-based ad-hoc routing. *IEEE/ACM Trans. on Networking*, 14, 3, 479, 2006.

## COEXISTENCIA DE TEMPERATURAS GRANULARES DIFERENTES EN UNA CAPA GRANULAR FLUIDIZADA

**(Coexistence of unequal granular temperatures in a fluidized granular layer)**

Trujillo, L.<sup>1</sup>; Roca J.<sup>1</sup>; Sigalotti Di G. L.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centro de Física, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC), A.P.  
Caracas. Venezuela  
Correo Electrónico: [trujillo@lpm.u-nancy.fr](mailto:trujillo@lpm.u-nancy.fr)

### RESUMEN

En este trabajo presentamos un cálculo para determinar la coexistencia de temperaturas granulares entre dos fases que poseen densidades diferentes. El modelo se basa en un conjunto de ecuaciones hidrodinámicas generalizadas para un fluido granular que toman en consideración la disipación de energía cinética, la cual se deriva del carácter inelástico de las colisiones entre granos. Se muestra que existe un acoplamiento entre la difusión y la disipación de energía, la cual depende de forma no trivial de las densidades, dando origen a la coexistencia de temperaturas granulares diferentes. Se muestra además que los resultados obtenidos por el presente análisis coinciden cualitativamente con los experimentos.

**Palabras Clave:** Medios granulares, temperatura granular, coexistencia de fases

### ABSTRACT

In this work we present a calculation for the coexistence of granular temperatures between two phases with different densities. The model is based on a hydrodynamical description for a granular fluid, which takes into account the kinetic energy dissipation arising from the inelastic nature of the collisions between grains. We show that there exists a coupling between the diffusion and dissipation coefficient, which depend in a non trivial manner on the densities, and determines the coexistence of different granular temperatures. The results presented in this work are in agreement with experiments.

**Key Words:** Granular media, granular temperature, phase coexistence

## INTRODUCCIÓN

A diferencia de muchos fluidos, los materiales granulares incluyen la coexistencia de regiones sólidas, líquidas y gaseosas, que producen una variedad rica de comportamientos complejos (Jaeger *et al.* 1996 y Aranson *et al.* 2006). La coexistencia de fases fuera del equilibrio ha sido observada recientemente en un serie de experimentos remarcables sobre capas granulares sujetas a vibraciones (Olafsen *et al.* 1998; Prevost *et al.* 2004; Olafsen *et al.* 2005, Gotzendorfer *et al.* 2005 Reis *et al.* 2006). En 1998 Olafsen y Urbach, reportaron que una mono-capa bidimensional de granos esféricos sujeta a vibraciones verticales exhibe un régimen bi-modal, esto es, gas-líquido, sólido-líquido o sólido-gas (Olafsen *et al.* 1998). Este régimen está caracterizado por una región densa de granos con movilidad baja circundada por granos que poseen una movilidad muy alta (similar a un gas de partículas agitadas) (Olafsen *et al.* 1998; Prevost *et al.* 2004). Esta transición de agregación (clustering) ocurre cuando la magnitud de las vibraciones que perturban al sistema es reducida (el sistema es “enfriado”). Esta transición se parece surgimiento de inestabilidades conducidas por agregación observada en un gas de partículas inelásticas (enfriamiento libre) descubierto por Goldhirsch y Zanetti en 1993 (Goldhirsch *et al.* 1993). Una observación fascinante que requiere atención especial es la observación de la ausencia de equipartición de la energía cinética entre las fases coexistentes (Prevost *et al.* 2004).

En los materiales granulares, que están bajo la acción del campo gravitatorio, el estado fluidizado se obtiene cuando el sistema es vibrado en la dirección vertical en la base del recipiente que los contiene, a través de un desplazamiento armónico  $A(t) = A_0 \sin(\omega t)$ , donde  $A_0$  es la amplitud máxima de oscilación y  $\omega = 2\pi f$  es la frecuencia de oscilación. La materia granular en el estado fluidizado puede ser descrita a nivel “macroscópico” mediante las ecuaciones de la hidrodinámica en analogía con la mecánica de fluidos (Haff, 1983 y Campbell, 1990). Estos modelos hidrodinámicos han provisto de una visión muy útil del comportamiento producido por vibraciones utilizando la correspondencia entre el movimiento de las moléculas en gases densos y el movimiento aleatorio de los granos (Haff, 1983 y Herrmann, 1998).

En contraste con un gas molecular que se

encuentre en el estado de equilibrio, donde la energía cinética media de una molécula es proporcional a la temperatura del gas (temperatura termodinámica), el estado natural de equilibrio de un material granular es una configuración estática que obedece a la naturaleza inelástica de las colisiones entre partículas. Para la mayoría de los sistemas dinámicos disipativos perturbados mediante fuerzas externas, el balance de energía puede ser escrito de la forma  $dE/dt = I - D$ , donde  $E$  es la energía total del sistema, constante en la ausencia de procesos disipativos y forzamiento externo,  $I$  es la potencia suministrada por la fuerza perturbadora externa y  $D$  es la potencia disipada por el sistema. Si se alcanza un régimen que sea estadísticamente estacionario, los promedios temporales ( $I$ ) y ( $D$ ) deben ser iguales. Por lo tanto, el estado estacionario fuera un sistema granular necesita de un flujo constante de energía externa (termostato) para compensar la potencia de energía disipada (Herrmann, 1998 y Aumaître *et al.* 2001). Por otra parte, cuando el estado estacionario fuera del equilibrio es alcanzado (i.e.,  $(I) = (D)$ ), y en analogía con un gas molecular, podemos definir una temperatura granular, que es proporcional a la energía cinética media de los granos. Esta temperatura no está relacionada con la temperatura (termodinámica) interna de los granos. Sin embargo, es una medida de las fluctuaciones de las velocidades de los granos, en yuxtaposición con el sentido de la temperatura termodinámica para un gas molecular real<sup>1</sup>.

Como consecuencia de la naturaleza disipativa y fuera del equilibrio de un sistema granular no se puede esperar a priori que la temperatura granular juegue el mismo rol que la temperatura termodinámica en lo concerniente a: i) El control de la dirección del flujo de calor y ii) Sirva de criterio de termalización. El primer punto puede evidenciarse a través de los gradientes de temperatura que aparecen en un sistema granular confinado entre una pared que vibra (“fuente de calor”) y una pared reflectora (Brey *et al.* 2000). Por otra parte, experimentos recientes han mostrado que materiales granulares fluidizados pueden comportarse como baños térmicos que satisfacen la relación de fluctuación-disipación (Baldassarri *et al.* 2005). Sin embargo, debido a la naturaleza inelástica de las colisiones entre granos no es de esperar que un equivalente al teorema de equipartición exista para un medio granular. En efecto, la falta de equipartición de energía en medios granulares ha sido observada claramente en el caso de mezclas binarias de granos que difieren en tamaño y/o

<sup>1</sup> Las referencias (Baldassarri *et al.* 2005, Serero *et al.* 2007, Baxter *et al.* 2007) presentan una discusión extendida sobre la definición de temperatura en materiales granulares.

densidad (Feitosa *et al.* 2002, Barrat *et al.* 2002). Las simulaciones numéricas realizadas por (Barrat *et al.* 2004) muestran que las relaciones clásicas de Green-Kubo se satisfacen por separado para cada componente de una mezcla granular. Ellos también observaron el caso cuando la concentración de una de las dos componentes tiende al límite diluido, que puede interpretarse como un termómetro que no altera al sistema considerablemente. En este caso se observa claramente que el termómetro está midiendo su propia temperatura y no la del medio granular circundante. Estos hallazgos nos obligan a pensar con cuidado sobre la posibilidad de establecer una analogía de un baño térmico para un material granular.

Experimentos recientes han esbozado que la temperatura granular no está distribuida uniformemente a través de una capa granular (Olafsen *et al.* 1998, Prevost *et al.* 2004, Olafsen *et al.* 2005, Gotzendorfer *et al.* 2005, Reis *et al.* 2006). Por ejemplo, los experimentos realizados por Olafsen y Urbach (Olafsen *et al.* 1998) muestran que al disminuir la tasa de inyección de energía (disminuyendo la amplitud de vibración), el sistema puede ser “enfriado” progresivamente<sup>2</sup> observándose el surgimiento de agregados transientes localizados. Al seguir disminuyendo la perturbación surge una transición de fase con la nucleación de un agregado de partículas sin movimiento coexistiendo con un fluido granular circundante. Resultados similares fueron reportados por (Prevost *et al.* 2004), quienes observaron la nucleación homogénea de un cristal en una capa densa de esferas de acero. Estos experimentos muestran que las dos fases coexistentes muestran temperaturas granulares muy diferentes, demostrándose así que la ley cero de la termodinámica no se satisface para la temperatura granular. Por lo tanto, la analogía de un baño térmico para un medio granular debe ser cuestionada seriamente.

Motivados por estos hallazgos experimentales, el presente trabajo está consagrado al cálculo del campo de temperatura granular en una capa. La aproximación adoptada se basa sobre un modelo hidrodinámico para materiales granulares fluidizados. Se construyen soluciones analíticas para las diferencias de temperatura granular entre una fase densa embebida en una fase menos densa, en una placa plana cuya geometría posee simetría radial. Estos cálculos son realizados para el estado estacionario, cuando la fase densa ya se ha formado. El cálculo es similar a los cálculos del campo de temperaturas en materiales

compuestos con inclusiones (Hasselman, 1987). Por lo tanto, la dinámica del proceso de nucleación no es considerada en este trabajo. Sin embargo, presentamos una explicación heurística del proceso de nucleación dirigido por las inestabilidades que surgen por la redistribución de masa en un gas granular. Finalmente, se discuten algunos aspectos sobre la analogía entre el proceso de coexistencia de fases con temperaturas diferentes en un medio granular y algunos fenómenos de la física de temperaturas bajas.

## TEORÍA

Podemos asumir que un medio granular puede ser descrito a nivel macroscópico por un conjunto de ecuaciones hidrodinámicas continuas en franca analogía con un fluido (Haff, 1983). Las ecuaciones del balance de los campos medios que caracterizan al flujo granular (masa, momentum y energía), así como, las relaciones constitutivas pueden derivarse de la teoría cinética de gases no-uniformes (Brilliantov *et al.* 2004). Para un medio granular las ecuaciones cinéticas son modificadas para tomar en consideración la naturaleza inelástica de las colisiones entre granos. La validez de la aproximación hidrodinámica, incluido el límite denso, ha sido justificada recientemente a través de comparaciones de la teoría con varios experimentos (Losert *et al.* 2000).

Como modelo mecánico para describir un medio granular consideremos una colección de partículas inelásticas cuya superficie es lisa y poseen un diámetro  $d$  y masa  $m$  (en este trabajo normalizamos la masa  $m = 1$ ). Las partículas interactúan a través de colisiones inelásticas, siguiendo la siguiente transformación de velocidades:

$$c'_{1,2} = c_{1,2} \mp \frac{1+e}{2} (\hat{k} \cdot c_{12}) \hat{k},$$

donde los índices 1 y 2 especifican a las partículas,  $c$  son las velocidades luego de ocurrida la colisión,  $c_{1,2}$  son las velocidades previas a la colisión,  $c_{12} = c_1 - c_2$  y  $\hat{k}$  es el vector unitario normal al plano tangencial de contacto en la dirección de 1 a 2. La inelasticidad es especificada por un coeficiente de restitución constante  $e \leq 1$ . Asumimos que este coeficiente es independiente de la velocidad de impacto.

### Ecuaciones hidrodinámicas

Las variables hidrodinámicas locales son: la densidad de partículas  $n(r, t)$ , el campo de flujo

<sup>2</sup> Por enfriamiento queremos significar la disminución de las velocidades de fluctuación de las partículas que se traduce por lo tanto en una disminución de la energía cinética.

$u(r, t)$  y la temperatura granular  $T(r, t)$ . La temperatura granular es definida como la energía cinética media. La dinámica del sistema está determinada por las ecuaciones de balance para la densidad, el momentum y la energía, siendo esta última complementada con un término adicional que toma

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{n} \nabla \cdot \hat{\mathbf{P}} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T + \frac{2}{3n} (\nabla \cdot \mathbf{q} + \hat{\mathbf{P}} : \nabla \mathbf{u}) = -D, \quad (2)$$

donde  $\hat{\mathbf{P}}$  es el tensor de presión,  $\mathbf{q}$  es el vector de flujo de energía. Estas ecuaciones pueden derivarse de forma riguosa a partir de las ecuaciones cinéticas de Enskog-Boltzmann generalizada para partículas inelásticas. Estas ecuaciones deben ser suplementada con las respectivas relaciones constitutivas para partículas inelásticas. Estas ecuaciones deben ser suplementada con las respectivas relaciones constitutivas para  $\hat{\mathbf{P}}$ ,  $\mathbf{q}$  y  $D$ . Cuando  $e=1 \Rightarrow D=0$  podemos recobrar el balance de energía para esferas duras elásticas.

En el límite de la aproximación de primer orden en los gradientes de los campos medios, el tensor de presión  $\hat{\mathbf{P}}$  posee, al nivel de Navier-Stokes, la forma Newtoniana canonica:

$$\hat{\mathbf{P}} = p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u})^T$$

donde  $p$  es la presión hidrostática,  $\mu$  es la viscosidad y el tensor unitario  $\mathbf{I}$ . para sistemas densos la ecuación de estado para la presión hidrstatica puede escribirse como

$$p = nZT$$

donde  $Z$  es el factor de compresibilidad,

$$Z = 1 + \frac{1+e}{3} \pi n d^3 g(v)$$

siendo  $v = \pi n d^3 / 6$  la fracción de empaquetamiento y la función de distribución radial está dada por la relación de (Carnahan *et al.* 1969):

$$g = \frac{1}{1-v} + \frac{v}{2(1-v)^2} \left[ 3 + \frac{v}{2(1-v)} \right], \quad (4)$$

## CAMPO DE TEMPERATURA GRANULAR

Ahora procedemos a calcular el campo de temperatura granular cuando coexisten dos fases de medios granulares con densidades diferentes. El cálculo se desarrolla para el estado estacionario. Pero primero deseamos introducir una explicación fenomenológica del proceso de nucleación.

### Agregación

Podemos comprender la transición de agregación (clustering) de manera heurística al considerar que los gases/fluidos granulares poseen una tendencia a coagular en agregados incluso en los casos donde la distribución de masa inicial es homogénea (Goldhirsch *et al.* 1993). Esta propiedad puede entenderse sobre la base de las siguientes consideraciones, así como, a través de los cálculos detallados en el trabajo (Goldhirsch *et al.* 1993). Un fluido granular, al igual muchos otros sistemas, experimenta fluctuaciones en la densidad. Debido a que en los dominios que son relativamente densos la tasa de colisiones (la cual es proporcional al cuadrado de la densidad) es mayor que en los dominios diluidos, la energía cinética en los dominios densos decae a una tasa mayor que en los dominios diluidos, debido al carácter inelástico de las colisiones entre granos. Por lo tanto, la diferencia de presiones conduce a los granos desde un dominio diluido hasta un dominio denso, incrementando la densidad de este último progresivamente, dando origen al surgimiento de aglomerados. A su vez los aglomerados que van surgiendo pueden agragarse entre si directamente para formar aglomerados mayores, y ellos pueden colisionar entre ellos destruyéndose mutuamente. El origen de estas inestabilidades que conducen a la formación de los agregados en el caso de capas bidimensionales surge de la disminución progresiva de la fuerza perturbadora externa (Olafsen *et al.* 1998). Por lo tanto un análisis detallado de la dinámica del proceso de agregación requiere la consideración del acoplamiento de las fuerzas perturbadoras externas en las ecuaciones de campo de la descripción hidrodinámica.

Lamentablemente este es un problema que no ha sido resuelto aún para los medios granulares, y constituye toda una investigación a parte que va más allá de los objetivos que persigue este trabajo en el cálculo de la diferencia de temperaturas en una capa granular. Teniendo esto en cuenta, el análisis que sigue a continuación considera que el sistema ha alcanzado un estado estacionario en forma análoga

a las observaciones experimentales reportadas en (Olafsen *et al.* 1998 y Olafsen *et al.* 2005).

### Solución estacionaria

En el régimen estacionario y en ausencia de corrientes de flujo ( $u = 0$ ), la ecuación para el balance de la energía se reduce a:

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla T) = D \quad (5)$$

La relación constitutiva para el flujo de calor,  $qx = -\kappa \nabla T$ , (6)

define la conductividad térmica del sistema (Brilliantov *et al.* 2004):

$$\kappa = \kappa^* \sqrt{T} \quad (7)$$

donde

$$\kappa^* = \frac{15}{4} \sqrt{\pi} n d \left[ 1 + \frac{5}{24} \frac{1}{G} + \frac{6}{5} \left( 1 + \frac{32}{9\pi} \right) G \right] \quad (8)$$

donde  $G = gv$ .

Para estimar la tasa de disipación  $D$  consideramos la perdida promedio de energía cinética por colisiones por unidad de tiempo. En una colisión binaria la energía cinética disipada puede ser expresada en términos de la temperatura granular como

$$\Delta E = -(1 - e^{-2}) T / 2 \quad (9)$$

Para un fluido de partículas la frecuencia de colisiones  $\omega \sim \sqrt{T}$  y asumimos que viene dada por la frecuencia de colisiones de Enskog (Chapmann *et al.* 1970):

$$\omega = \frac{\Omega}{\sqrt{2\pi}} n g d \left( \frac{2}{m} \right)^{1/2} T^{1/2}, \quad (10)$$

donde  $\Omega = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$  es la superficie de una esfera unitaria  $D$ -dimensional. Multiplicando  $\Delta E$  por la tasa de colisiones  $\omega$  y la densidad  $n = N/V$ , obtenemos la tasa de disipación de las partículas de fluido granular:

$$D = \frac{\Omega}{\sqrt{2\pi}} n^2 g d \left( \frac{2}{m} \right)^{1/2} T^{3/2}. \quad (11)$$

Para simplificar la notación definimos el factor de disipación

$$\gamma \equiv \frac{\Omega}{\sqrt{2\pi}} n^2 g d \left( \frac{2}{m} \right)^{1/2}, \quad (12)$$

Para poder expresar así la Eq. (11) como

$$D = \gamma T^{3/2} \quad (13)$$

Ahora procedemos a resolver la Eq.(5). En analogía con la geometría de los experimentos (Olafsen *et al.* 1998 y Olafsen *et al.* 2005) consideramos el caso de un disco (aproximación quasi-bidimensional). Las soluciones de la Eq.(5) con simetría radial deben satisfacer la ecuación.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \kappa^* \sqrt{T} \frac{dT}{dr} \right) = \gamma T^{3/2}. \quad (14)$$

Esta ecuación diferencial no-lineal puede simplificarse bajo la aproximación de presión uniforme a través del sistema. Esta aproximación está justificada por las observaciones experimentales (Prevost *et. al* 2004) que muestran que las fases coexisten a temperaturas diferentes, pero con presión casi constante. Al linealizar (14) la ecuación resultante pude escribirse de forma sencilla en términos de la variable  $w \equiv \sqrt{T}$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \lambda^2 w, \quad (15)$$

donde

$$\lambda^2 \equiv \frac{\gamma}{2\kappa^*}. \quad (16)$$

Este coeficiente acopla los efectos de difusión por efecto del gradiente de energía cinética y la disipación de energía.

Ahora bien, para calcular la diferencia de temperaturas granulares en la capa con simetría radial consideramos dos regiones que se diferencian a través de la densidad. De las ecaciones anteriores se deduce fácilmente que el coeficiente  $\lambda$  es una función que depende de forma no trivial de la densidad del sistema  $\lambda = \lambda(n)$ . Sea entonces el caso de una región comprendida entre  $0 < r \leq r_i$ , que corresponde a la región del condensado que esta circundado por la región  $r_i < r \leq r_o$  que es menos densa y que corresponde al fluido, esto es  $n_i > n_o$ . Esta diferencia de densidades esta expresada a través de los coeficientes  $\lambda_i$  para cada dominio como

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \begin{cases} \lambda_I^2 w, & \text{para } 0 < r \leq r_I, \\ \lambda_F^2 w, & \text{para } r_I < r \leq r_0, \end{cases} \quad (17)$$

Las soluciones de la ecuación (17) están determinadas por las condiciones de contorno impuestas sobre el sistema. La temperatura en la superficie  $r_0$  es  $T_0$  (respectivamente  $w(r_0) = w_0$ ). Luego en la interface localizada en  $r = r_I$ ,  $w(r)$  satisface la relación de continuidad

$$w_-(r)|_{r=r_I} = w_+(r)|_{r=r_I}. \quad (18)$$

Donde denotamos por  $-$  y  $+$  las regiones internas y externas al condensado justo en la interface.

El flujo de energía cinética también impone otra condición de borde interna. Suponemos que el flujo de energía es continuo sobre la superficie de la interface. De la ecuación (6) podemos fijar que la temperatura granular debe cumplir con

$$\frac{dw_-(r)}{dw}|_{r=r_I} = \frac{dw_+(r)}{dr}|_{r=r_I}. \quad (19)$$

La solución de la ecuación (17) es una combinación lineal de funciones de Bessel de orden cero  $w_i(r) = \{I_0(\lambda r), K_0(\lambda r)\}$ , esto es

$$w_-(r) = A_- I_0(\lambda_I r) + B_- K_0(\lambda_I r) \quad \text{para } 0 < r \leq r_I \quad (20)$$

y

$$w_+(r) = A_+ I_0(\lambda_F r) + B_+ K_0(\lambda_F r) \quad \text{para } r_I < r \leq r_0 \quad (21)$$

donde  $A_-$ ,  $A_+$ ,  $B_-$  y  $B_+$  son constantes que deben ser determinadas a partir de las condiciones de borde.

La función  $K_0(\lambda r)$  diverge cuando  $r \rightarrow 0$ , entonces

$$B_- = 0 \quad (22)$$

Cuando  $r = r_0$  la ecuación (21) debe satisfacer la condición de borde

$$w_+(r)|_{r=r_0} = w_0, \quad (23)$$

esto es,

$$A_+ I_0(\lambda_F r_0) + B_+ K_0(\lambda_F r_0) = w_0 \quad (24)$$

Sobre la superficie interna la condición de borde (18)  $w_-(r_I) = w_+(r_I)$  conduce a

$$\begin{aligned} A_- I_0(\lambda_I r_I) &= A_+ I_0(\lambda_F r_I) + B_+ K_0(\lambda_F r_I) \\ \implies A_- &= A_+ \frac{I_0(\lambda_F r_I)}{I_0(\lambda_I r_I)} + B_+ \frac{K_0(\lambda_F r_I)}{I_0(\lambda_I r_I)}. \end{aligned} \quad (25)$$

La condición de borde interna (19) conduce a

$$\begin{aligned} A_- \lambda_I I_1(\lambda_I r_I) &= A_+ \lambda_F I_1(\lambda_F r_I) - B_+ \lambda_F K_1(\lambda_F r_I) \\ \implies A_- &= \left( \frac{\lambda_F}{\lambda_I} \right) \left[ A_+ \frac{I_1(\lambda_F r_I)}{I_1(\lambda_I r_I)} - B_+ \frac{K_1(\lambda_F r_I)}{I_1(\lambda_I r_I)} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Igualando las ecuaciones (25) y (26) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{A_+}{B_+} &= \frac{\lambda_F I_0(\lambda_I r_I) K_1(\lambda_F r_I) + \lambda_I I_1(\lambda_I r_I) K_0(\lambda_F r_I)}{\lambda_F I_0(\lambda_I r_I) I_1(\lambda_F r_I) - \lambda_I I_1(\lambda_I r_I) I_0(\lambda_F r_I)} \quad (27) \\ &\equiv \Theta_{AB} \end{aligned}$$

De las ecuaciones (24) y (27) la constante  $B_+$  es

$$B_+ = \frac{\omega_0}{\Theta_{AB} I_0(\lambda_F r_0) + K_0(\lambda_F r_0)} \quad (28)$$

Sustituyendo la ecuación (28) en (27) se obtiene

$$A_+ = \frac{\omega_0 \Theta_{AB}}{\Theta_{AB} I_0(\lambda_F r_0) + K_0(\lambda_F r_0)} \quad (29)$$

Sustituyendo las ecuaciones (28) y (29) en la ecuación (25) se obtiene

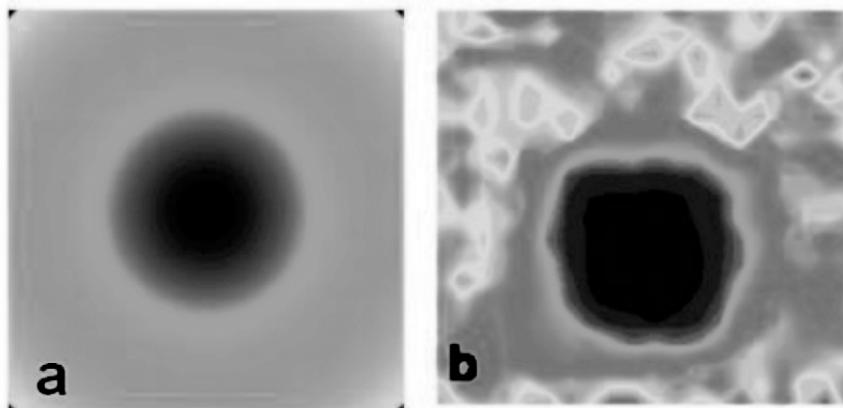
$$A_- = \frac{\Theta_{AB} I_0(\lambda_F r_I) + K_0(\lambda_F r_I)}{\Theta_{AB} I_0(\lambda_F r_0) + K_0(\lambda_F r_0)} \frac{\omega_0}{I_0(\lambda_I r_I)} \quad (30)$$

Finalmente, la expresión (21) del campo de temperatura granular entre el condensado y el fluido granular es

$$T_1(r) = \begin{cases} (A_- I_0(\lambda_I r))^2 & \text{para } 0 < r \leq r_I, \\ (A_+ I_0(\lambda_F r) + B_+ K_0(\lambda_F r))^2 & \text{para } r_I < r \leq r_0, \end{cases} \quad (31)$$

donde las constantes  $A_-$ ,  $A_+$  y  $B_+$  están dadas por las ecuaciones (30), (29) y (28), respectivamente.

La información contenida en los coeficientes  $\lambda_I$  y  $\lambda_F$  toman en cuenta el acoplamiento entre la difusión y la disipación de energía en el sistema. Estos coeficientes dependen de manera no trivial de la densidad. El análisis directo de la dependencia con la diferencia de densidades de la ecuación (31) se complica aun más con los coeficientes de integración calculados a partir de las condiciones de borde. En la figura 1(a) presentamos un cálculo numérico cualitativo de la



**Figura 1. Campo de temperatura granular cerca de la interface entre la región de mayor densidad circundada por el fluido granular. La figura(a) corresponde al cálculo realizado a partir de la ecuación 31 y la figura(b) corresponde los resultados experimentales reportado por (Prevost *et al.* 2004)**

temperatura granular del sistema (ecuación (31)) cuando existe una región de densidad  $n_i$  circundada por una región de densidad  $n_F$ , siendo  $n_i > n_F$ . De este cálculo podemos observar claramente que la región con mayor densidad posee una temperatura granular menor. Mientras que en la región que circunda al condensado, la cual posee una densidad menor, la temperatura granular es mayor. En la figura 1(b) podemos apreciar que el comportamiento cualitativo de nuestro resultado coincide bastante bien con los resultados experimentales reportados por (Prevost *et al.* 2004).

## CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos un desarrollo analítico para el cálculo del gradiente del campo de temperatura granular cuando en el sistema coexiste una región de mayor densidad y una de menor densidad. Basados en un modelo de ecuaciones hidrodinámicas, que se derivan de la generalización de la ecuación de Boltzmann-Enskog para gases densos, donde se incluye el efecto de la disipación de energía cinética, pudimos derivar una expresión para la temperatura granular del sistema en el estado estacionario. Esta coexistencia de temperaturas inducida por la diferencia de densidades es posible solo por la naturaleza inelástica de las colisiones entre los granos que constituyen el medio. De lo contrario, la energía cinética quedaría claramente equidistribuida en el sistema. Esto es una manifestación clara que el sistema

solo puede estar en un estado fuera del equilibrio termodinámico.

La formulación analítica presentada en este trabajo podría extenderse para otros sistemas similares donde coexisten fases con temperaturas diferentes. La ecuación (31) es análoga en su estructura al caso del estudio conductividades térmica efectivas en materiales compuestos donde surgen *resistencias de barreras térmicas* (Hasselman, 1987). Es interesante notar que para los materiales compuesto las resistencias térmicas que surgen en la interfase entre dos fases presentan una analogía con la resistencia de Kapitza, la cual surge en la interfase entre dos fases de helio líquido con densidades diferentes. Lo cual es muy parecido al fenómeno descrito en este trabajo en medios granulares. Los medios granulares por tratarse de sistemas atémicos, donde la temperatura definida en el sentido usual de la termodinámica no puede aplicarse, han servido de sistemas de referencia para establecer analogías con fenómenos físicos que ocurren a temperaturas muy bajas. Los resultados presentados en este trabajo podrían orientarse en esa dirección.

## AGRADECIMIENTOS

L.T. agradece la hospitalidad brindada por los organizadores del II Taller Andino de Caos y Complejidad y en especial a los Profesores Javier González Estevez y Gilberto Paredes, igualmente, al Prof. Bertrand Berche por las discusiones entorno al

problema de coexistencia de fases.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARANSON, I. y TSIMRING, L. Patterns and collective behavior in granular media: Theoretical concepts. *Rev. Mod. Phys.* 78: 641–692. 2006.
- AUMAÎTRE, S.; FAUVE, S.; MCNAMARA, S. y POGGI, P. Power injected in dissipative systems and the fluctuation theorem. *Eur. Phys. J. B* 19: 449–460. 2001.
- BALDASSARRI, A.; BARRAT, A.; D'ANNA, G.; LORETO, V.; MAYOR, P. y PUGLISI, A. What is the temperature of a granular medium? *J. Phys.: Condens. Matter* 17: S2405–S2428. 2005.
- BARRAT, A.; LORETO V. y PUGLISI A. Temperature probes in binary granular gases, *Physica A*, 334:513–523. 2004.
- BARRAT, A. y TRIZAC, E. Lack of energy equipartition in homogeneous heated binary granular mixtures, *Granular Matter*, 4: 57-63. 2002.
- BAXTER, G. y OLAFSEN, J. The temperature of a vibrated granular gas. *Granular Matter* 9: 135–139. 2007.
- BREY, J.; RUIZ, M. y MORENO, F. Boundary conditions and normal state for vibrated granular fluid, *Phys. Rev. E* 62:5339–5346. 2000.
- BRILLIANTOV, N. y POSCHEL, T. Kinetic theory of granular gases, Oxford University Press, 2004 *Phys. Rev. E*, 62: 5339. 2000.
- CARNAHAN, N y STARLING, E. Equation of state of nonattracting rigid spheres. *J. Chem. Phys.* 51:635–636. 1969.
- CAMPBELL, C. Rapid granular flows, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22:57-92. 1990.
- CHAPMAN, S. y COWLING, T. The Mathematical Theory of Nonuniform gases, Cambridge University Press. 1970.
- FEITOSA, K. y MENON, N. Breakdown of energy equipartition in a 2D binary vibrated granular gas, *Phys. Rev. Lett.* 88:198301. 2002.
- GOLDHIRSCH, I. y ZANETTI, G. Cluster instability in dissipative gases. *Phys. Rev. Lett.* 70:1619-1622. 1993.
- GOTZENDORFER, A.; KREFT, J.; KRUELLE, C. y REHBERG, I. Sublimation of a vibrated granular monolayer: Coexistence of gas and solid. *Phys. Rev. Lett.* 95:135704. 2005.
- HAFF, P. Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon, *Journal of Fluid Mechanics*, 134: 401-430. 1983.
- HASSELMAN, D. y JOHNSON, L. Effective thermal conductivity of composites with interfacial thermal barrier resistance, *Journal of Composite Materials*, 21:508-515. 1987.
- HERRMANN, H. On the thermodynamics of granular media. *J. Physique II* 3:427–433. 1998.
- JAEGER, H. y NAGEL, S. y BEHRINGER, R. Granular solids, liquids and gases. *Rev. Mod. Phys.* 68:1259–1273. 1996.
- LOSERT, W.; BOCQUET, L.; LUBENSKY, T. y GOLLUB, J. Particle dynamics in shared granular matter, *Phys. Rev. Lett.* 85:1428-1431. 2000.
- OLAFSEN, J. y URBACH, J. Clustering, Order, and Collapse in a Driven Granular Monolayer. *Phys. Rev. Lett.* 81, 4369–4372. 1998.
- OLAFSEN, J. y URBACH, J. Two-Dimensional Melting Far from Equilibrium in a Granular Monolayer. *Phys. Rev. Lett.* 95, 098002. 2005
- PREVOST, A.; MELBY, P.; EGOLF, D. y URBACH, J. Nonequilibrium two phase coexistence in a confined granular layer. *Phys. Rev. E* 70:050301(R). 2004.
- REIS, P.; INGALE, R. Y SHATTUCK, M. Crystallization of a quasi-two-dimensional granular fluid. *Phys. Rev. Lett.* 96:258001. 2006.

## ESTIMACIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL EN SERIES DE TIEMPO DE LA FRECUENCIA CARDÍACA FETAL

(Estimating fractal dimension in time series of fetal cardiac frequency)

Ortega, J.<sup>1</sup>; Infante, S.<sup>1</sup>; González, X.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología,  
Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela

<sup>2</sup>Unidad de Perinatología, Facultad de Ciencias de la Salud,  
Universidad de Carabobo, Puerto Cabello, Venezuela

Correo Electrónico: [jortega@uc.edu.ve](mailto:jortega@uc.edu.ve), [sinfante@uc.edu.ve](mailto:sinfante@uc.edu.ve), [xgonzalez@uc.edu.ve](mailto:xgonzalez@uc.edu.ve)

### RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio de la variabilidad del patrón de la frecuencia cardíaca fetal, mediante métodos de análisis de sistemas no lineales. Estudios realizados en las últimas décadas sugieren que el comportamiento de la frecuencia cardíaca es un proceso con dinámica no lineal cuyo comportamiento complejo puede explicarse a partir de modelos caóticos. Estas técnicas han sido particularmente útiles para caracterizar diversas patologías y su grado de avance. El ritmo cardíaco es perturbado por alteraciones del sistema nervioso central, causados por muchos factores externos, tales como el consumo de drogas, no ingerir alimentos adecuados, el envejecimiento fisiológico de la madre, etc. Estas condiciones están asociadas con la pérdida de la complejidad de la dinámica del latido cardíaco fetal. Estos cambios, que posiblemente no son detectables por métodos convencionales, pueden ser cuantificados usando las técnicas de series de tiempo no lineal. En particular, la dimensión del atractor podría utilizarse como un criterio de discriminación entre pacientes sanos y enfermos. El aspecto principal a resolver en el análisis de un sistema caótico, es la reconstrucción del espacio de fases a partir de la señal univariada. Para lograr este objetivo se utiliza la técnica propuesta por Grassberger y Procaccia (1983).

**Palabras Clave:** Dimensión fractal, frecuencia cardíaca fetal, análisis no lineal, sistema caótico.

### ABSTRACT

In this work a study of the variability of the pattern of the cardiac frequency in fetuses appears, by means of methods of analysis of systems nonlinear. Studies made in the last decades suggest the behavior of the cardiac frequency is a process with dynamics nonlinear whose complex behavior can be explained from chaotic models. These techniques have been particularly useful to characterize diverse pathologies and their degree of advance. The heart rate is disturbed by alterations of the central nervous system, caused by many external factors, such as the drug consumption, not to ingest suitable foods, the physiological aging of the mother, etc. These conditions are associate with the loss of the complexity of the dynamics of the cardiac beat of the fetus. These changes that are not possibly detectable by conventional methods, they can be quantified using the techniques of series of time nonlinear. In individual, the dimension of the atractor could be used like a criterion of discrimination between healthy and ill patients. The main aspect to solve in analysis of a chaotic system, it is the reconstruction of the space of phases from the univariada signal. In order to obtain this objective the propose technique by Grassberger y Procaccia (1983) is used.

**Key Words:** Fractal dimension, fetal heart rate, non linear analysis, caos system.

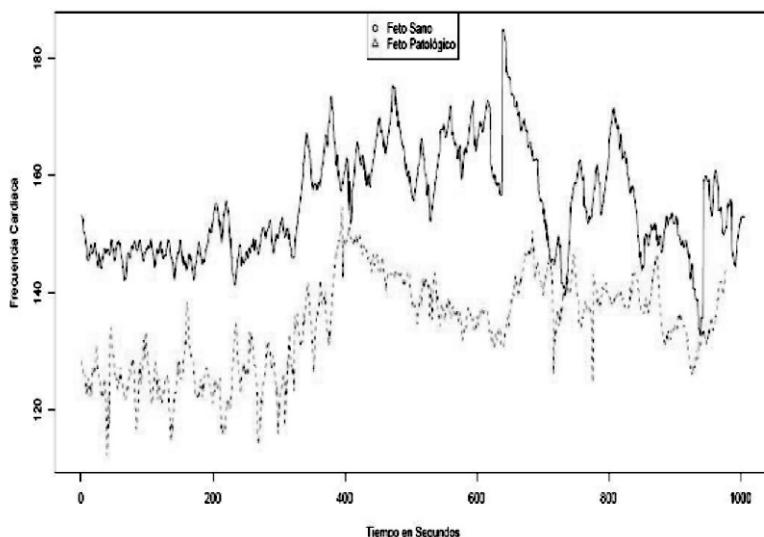
## INTRODUCCIÓN

El análisis de las series de tiempo que provienen de sistemas no lineales, es de mucho interés debido a que se han convertido en una herramienta confiable para el estudio de medidas que tienen dinámicas complicadas como por ejemplo, los sistemas físicos, económicos, fisiológicos o biológicos. Las técnicas de reconstrucción de la dinámica, desarrollada en la década de los 80 del siglo pasado, permiten reconstruir a partir de una señal de observaciones experimentales la dinámica del sistema en un espacio de fase de dimensión menor donde se reproduce la dinámica original del sistema. Estas técnicas son aplicadas a fenómenos que tienen un comportamiento no lineal, con la idea subyacente de capturar la mayor información de su estructura, y además observar si exhiben alguna conducta dinámica específica o tienen alguna tendencia sobre escalas de tiempo múltiples. La dinámica de los datos puede tener un comportamiento similar a un proceso caótico o estocástico. Ambos procesos pueden tener una conducta errática similar pero estructuras diferentes, ya que un sistema dinámico determinístico es un sistema cuyos parámetros internos o variables de estado siguen una serie de reglas, mientras que los procesos estocásticos tienen un comportamiento aleatorio. El espacio de fase de un sistema dinámico continuo está descrito por un campo vectorial que rige el recorrido de las variables de estado del sistema con respecto al tiempo. El recorrido de estas variables se denomina óbita o trayectoria. En el espacio de fase existen ciertos subconjuntos que atraen (o repelen) a las trayectorias que pasan cerca de ellos. Una región del espacio de fase recibe el nombre de atractor si toda trayectoria que comienza cerca de la región se le aproxima a medida que el tiempo transcurre. De hecho si dicha región atrae a todas las órbitas del espacio de fase recibe el nombre de atractor global. Cuando el sistema es lineal estas regiones de atracción sólo pueden ser puntos, que se conocen como puntos fijos; los sistemas no lineales en cambio pueden presentar una gama más amplia de regiones de atracción: puntos fijos, ciclos límites y regiones más complicadas conocidas como atractores extraños. Los sistemas donde aparecen estos últimos se denominan caóticos. Existe una extensa bibliografía sobre este tema, ver: (Casdagli, 1992), (Ruelle, 1989), (Ott, 1993), (Takens, 1981), (Smith, 1992), (Wolff, 1990), (Theiler, 1990), (Kantz, *et al.* 1997), (Kaplan *et al.* 1995) entre otros.

Los campos de aplicación de estas técnicas, abarcan: electrofísica, dinámica de fluidos, astrofísica, climatología, biología y medicina entre otras áreas (Kugiumtzis *et al.* 1994). En el ámbito de la medicina, que es la aplicación que se estudiara en este artículo, existen muchos antecedentes, entre ellos están los trabajos de Richter y Schreiber (1998) quienes estudiaron las propiedades del monitoreo de la frecuencia cardíaca humana y usaron el método de inmersión del espacio de fase para tratar las señales. Las aplicaciones prácticas que ellos discuten se refieren a la filtración del ruido, la extracción del monitoreo de la frecuencia cardíaca fetal y la detección automática de características clínicas relevantes. Casdagli (1997), considera el problema de detectar cambios en las fuerzas que impulsan el sistema dinámico mediante gráficos recurrentes y propone técnicas estadísticas, tales como el método de los datos subrogados de Theiler *et al.* 1992, que permite detectar una estructura no lineal en una serie temporal, para evaluar su significancia. El ejemplo que utiliza para mostrar esta metodología es una serie de tiempo de registros de respiración de un individuo con apnea del sueño. Goldsberger *et al.* 1990, analizaron la variabilidad de la frecuencia cardíaca como un proceso de dinámica no lineal de naturaleza fractal cuyo comportamiento podría ser explicado a partir de modelos caóticos, debido a que la frecuencia cardíaca es perturbada por las alteraciones del sistema nervioso. Finalmente Carvajal *et al.* 2000, utilizaron la dimensión de correlación como un índice para estimar la complejidad de la variabilidad de la frecuencia cardíaca tanto en personas sanas como en pacientes con cardiomiopatía hipertrófica y dilatada.

En este artículo nos concentraremos en analizar señales de frecuencias cardíacas en fetos, considerando el monitoreo de la frecuencia cardíaca de fetos sanos y con patologías. En la figura (1) se muestra el gráfico simultáneo de las series temporales de dos fetos promedios de las muestras uno sano y el otro patológico. La serie con el color azul representa al feto sano, mientras que la serie de color rojo representa el feto con patología. En la figura puede observarse que el monitoreo de la frecuencia cardíaca del feto con patología difiere del feto sano.

El resto del artículo es estructurado como sigue, se discuten los métodos para la reconstrucción del espacio de fase de la serie de tiempo generada por el monitoreo de la frecuencia cardíaca de los fetos y se definen las técnicas que se utilizarán para



**Figura 1. Ciclo de monitoreo para un feto sano y uno patológico**

estimar los parámetros (tiempo de retardo  $\tau$  y dimensión de inmersión  $m$ ) de la señal no lineal estudiada, también se presentan los resultados obtenidos por la metodología propuesta, luego se hace una discusión sobre los resultados y finalmente se establecen las conclusiones finales del trabajo.

## MÉTODO

Considérese una serie de tiempo univariada  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  generada por un sistema dinámico determinístico  $d$ -dimensional  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  con  $p$  parámetros y una función de observación no lineal desconocida  $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  de acuerdo a:

$$\begin{aligned} s_{i+1} &= f(s_i, \gamma_i) \quad (1) \\ x_{i+1} &= h(s_{i+1}) \quad (2) \end{aligned}$$

donde:  $s_i \in \mathbb{R}^d$  y (1) denota la ecuación de estado del sistema, la ecuación (2) denota la ecuación de observación del sistema y  $\gamma_i \in \mathbb{R}^p$  es una fuerza de impulso no observada que varía lentamente; es decir,  $\|\gamma_{i+1} - \gamma_i\|$  es una distancia relativamente pequeña entre los estados sucesivos del sistema. Se puede considerar que las funciones  $f$  y  $h$  son suavizadas en casi todas partes y ambas son desconocidas. Entonces dada la serie  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  de longitud  $N$ , se construyen los  $(N-(m-1)\tau)$  puntos (vectores desfasados)

$$v_i = x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau} \quad (3)$$

donde:  $m$  es la dimensión de inmersión,  $\tau$  es el tiempo retardo o demora y  $i=1, 2, \dots, N-(m-1)\tau$ . Estos vectores desfasados se utilizan posteriormente para reconstruir el atractor en el espacio de fase. Los teoremas de inmersión (Takens, 1981) y (Sauer *et al.* 1991) muestran que si la secuencia  $v_i$  representa un vector de medidas del estado del sistema dinámico, entonces bajo ciertas condiciones generales, tales como una escogencia adecuada del tiempo de retardo  $\tau$  y una elección de la dimensión de inmersión  $m$  lo suficientemente grande, se puede reproducir una imagen uno a uno del conjunto original de los datos. Hay una literatura extensa sobre como escoger los parámetros  $m$  y  $\tau$  en una forma óptima (ver [Hegger *et al.* 1998] y sus referencias). Sin embargo, la mejor elección depende de la naturaleza del problema.

del sistema. Se puede considerar que las funciones  $f$  y  $h$  son suavizadas en casi todas partes y ambas son desconocidas. Entonces dada la serie  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  de longitud  $N$ , se construyen los  $(N-(m-1)\tau)$  puntos (vectores desfasados)

$$v_i = x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau} \quad (3)$$

donde:  $m$  es la dimensión de inmersión,  $\tau$  es el tiempo de retardo o demora y  $i=1, 2, \dots, N-(m-1)\tau$ . Estos vectores desfasados se utilizan posteriormente para reconstruir el atractor en el espacio de fase. Los teoremas de inmersión ([Takens 1981] y [Sauer *et al.* 1991]) muestran que si la secuencia  $v_i$  representa un vector de medidas del estado del sistema dinámico, entonces bajo ciertas condiciones generales, tales como una escogencia adecuada del tiempo de retardo  $\tau$  y una elección de la dimensión de inmersión  $m$  lo suficientemente grande, se puede reproducir una imagen uno a uno del conjunto original de los datos. Hay una literatura extensa sobre como escoger los parámetros  $m$  y  $\tau$  en una forma óptima (ver [Hegger *et al.* 1998] y sus referencias). Sin embargo, la mejor elección depende de la naturaleza del problema.

En la literatura se han propuesto diversas medidas no lineales para estimar la complejidad de una serie de tiempo, tales como: la dimensión de correlación, el exponente mayor de Lyapunov, los índices de información y complejidad, los mapas de Poincaré, el método de los datos subrogados y las entropías, con la intención de identificar la presencia no lineal y posiblemente conductas caóticas de las series de tiempo. En este trabajo se utiliza la dimensión de correlación como herramienta para estimar la dimensión fractal

## Métodos para estimar $\tau$ y $m$

Como ya se ha establecido, el espacio de fase de un sistema dinámico, puede ser reconstruido a partir de la observación de una serie de tiempo univariada escogiendo adecuadamente  $m$  y  $\tau$  en la ecuación (3). Una primera manera de escoger el tiempo de retardo  $\tau$ , es usando la función de autocorrelación, que se define por:

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-\tau} (x_i - \bar{x})(x_{i+\tau} - \bar{x}) \quad (4)$$

donde  $x$  es la media aritmética y se elige  $\tau$  de tal manera que la función  $\gamma(\tau)$  tienda a cero, es decir, se minimiza la dependencia estadística entre las coordenadas de los vectores. En la práctica, no se conoce a priori la dimensión del sistema dinámico, y la dimensión de inmersión es necesaria para la reconstrucción del espacio de fase. Por lo tanto, el estimador de la dimensión es obtenido incrementando la dimensión de inmersión hasta que el estimador de la dimensión se estabilice.

Una segunda estrategia para escoger  $\tau$  es a partir de la función de información mutual (AMI), sugerida por Fraser y Swinney (1986), como una herramienta para determinar un tiempo de retardo razonable. A diferencia de la función de autocorrelación, la información mutual toma en cuenta las correlaciones no lineales, y se estima mediante la siguiente ecuación:

$$S = - \sum_i \sum_{ij} p_{ij}(\tau) \ln \left[ \frac{p_{ij}(\tau)}{p_i p_j} \right] \quad (5)$$

donde para alguna partición elegida sobre los números reales,  $p_i$  es la probabilidad de encontrar un valor de la serie en el  $i$ -ésimo intervalo,  $p_j$  es la probabilidad de encontrar un valor de la serie en el  $j$ -ésimo intervalo, y  $p_{ij}(\tau)$  es la probabilidad conjunta de que una observación cae en el  $i$ -ésimo intervalo y otra observación cae más tarde después de un tiempo  $\tau$  en el  $j$ -ésimo intervalo. Nótese que la ecuación en (5) no depende del tamaño de la partición de los datos y puede ser fácilmente calculada. El criterio de selección del  $\tau$  se basa en lo siguiente, si el tiempo de retardo de la información mutual muestra un mínimo para ciertos valores de  $\tau$ , entonces este es el candidato idóneo para elegir un tiempo de retardo razonable. Es importante señalar que los argumentos anteriores pueden ser modificados cuando la dimensión de inmersión excede a dos, es decir, la información mutual

generalizada puede ser definida usando el concepto de suma de correlación (dimensión de correlación y entropías).

Un método para determinar un mínimo suficiente para la dimensión de inmersión  $m$  fue propuesto por (Kennel *et al.* 1992) y es llamado el método del vecino falso. La idea es completamente intuitiva y consiste en lo siguiente, supóngase que la dimensión de inmersión mínima para una serie  $\{x^1, x^2, \dots, x^N\}$  es  $m_0$ . Esto significa que en el espacio de retardo de dimensión  $m_0$  el atractor reconstruido es una imagen uno a uno del atractor en el espacio de fase original. las propiedades topológicas se preservan, y los vecinos de un punto dado son trasladados a vecinos del espacio de retardo. Por su puesto, la forma y el diámetro de los puntos de la vecindad son transformado de acuerdo al exponente de Lyapunov. Pero supóngase ahora que la inmersión es en un espacio de dimensión  $m$  con  $m < m_0$ . La estructura topológica de esta proyección ahora no se preserva, y los puntos son proyectados en puntos en una vecindad de otros puntos los cuales podrían estar en una dimensión mayor, y estos puntos son los llamados los vecinos falsos. La idea del algoritmo del vecino falso es la siguiente. Para cada vector de retardo

$$v_i = (x_i, x_{i+\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau})$$

se observa su vecino más cercano

$$v_i^{vf} = (x_i^{vf}, x_{i+\tau}^{vf}, \dots, x_{i+(m-1)\tau}^{vf})$$

Se calcula la distancia  $\|v_i - v_i^{vf}\|$  y luego se itera en ambos puntos y se calcula:

$$R_i = \frac{|x_{i+(m-1)\tau} - x_{i+(m-1)\tau}^{vf}|}{\|v_i - v_i^{vf}\|} \quad (6)$$

Si  $R_i$  excede un umbral  $R_t$  dado, este punto es marcado como el vecino falso más cercano. El criterio de parada para determinar la dimensión de inmersión consiste en considerar que la fracción de puntos para los cuales  $R_i > R_t$  es cero, o al menos sea lo suficientemente pequeño. En la práctica, se gráfica la fracción de vecinos falsos como una función de la dimensión de inmersión y se toma el valor mínimo. La implementación del vecino falso permite especificar la separación temporal mínima de los vecinos validos.

En este trabajo, también se usa una técnica de tipo lineal de una serie temporal tradicional para complementar el método anterior. Como el interés es encontrar la dimensión de inmersión, entonces se

ajusta un modelo autoregresivo y con ello se determina el orden de la serie. Estos modelos han sido ampliamente usados para inferencia y pronóstico de procesos. En este caso particular, no lo usaremos como predictor lineal, nos interesa encontrar el orden del modelo que permita hacer un balance entre la reducción de la varianza del error y el número de parámetros estimados. Una medida utilizada para tal fin es el criterio de información de akaike. Para un modelo de orden  $k$ , el criterio puede ser escrito como sigue:

$$CIA(k) = n \log(\sigma_{e,k}^2) + 2k \quad (7)$$

donde  $\sigma_{e,k}^2$  es la varianza de los datos y  $k$  es el número de parámetros que intervienen en el modelo. Si la serie temporal se modela como un proceso autorregresivo, entonces el valor de  $k$ , es el valor que minimiza al criterio de  $CIA(k)$ , y por lo tanto, es un estimador del orden del modelo autorregresivo.

### Dimensión de correlación

Hay muchas formas de definir la dimensión y han sido muchas las revisiones bibliográficas realizadas en este campo. Hegger *et al.* (1998) señalan que las dimensiones generalizadas son una clase de medidas utilizadas para caracterizar los fractales. La dimensión de Hausdorff es desde el punto de vista matemático, el concepto más natural para caracterizar los conjuntos fractales, mientras que la dimensión de información toma en cuenta las frecuencias de visitas relativas y por lo tanto es más atractiva en los sistemas físicos, mientras que para la caracterización de medidas de datos y otros conceptos similares, la dimensión de correlación es la más adecuada. Supóngase  $\{x_1, \dots, x_N\}$  es una serie temporal de longitud  $N$ , de la cual se construyen los vectores desfasados:

$$v_i = (x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau})$$

donde:  $i = 1, 2, \dots, N_m = N - (m-1)\tau$ , y el entero  $m$  es la dimensión de inmersión en el espacio de fase. La integral de correlación  $C_m(c)$  del proceso es definido por el número de pares de vectores,  $v_i, v_j, i < j$ , que están a una distancia  $c$  uno del otro, corregido por un factor de corrección, y donde  $\epsilon > 0$  es fijado.

$$C_m(\epsilon) = \frac{2}{N_m(N_m - 1)} \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{j=1}^{i-1} I_{\{\|v_i - v_j\| < \epsilon\}}$$

donde  $I$  denota la función indicatriz del conjunto  $\{\|v_i - v_j\| < \epsilon\}$  y  $\|\cdot\|$  es una norma, (generalmente se toma la norma  $L^2$ ). El límite

$$C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} C_m(\epsilon) \quad (8)$$

es llamado la integral correlación. Para muchos sistemas se observa que  $C(\epsilon)$  tiene una conducta de ley potencia para  $c$  pequeño, por lo tanto  $C(\epsilon)$  se puede aproximar como sigue:

$$C(\epsilon) \approx \epsilon^p \quad (9)$$

donde  $p$  representa el estimador de la dimensión del atractor. Este resultado motiva el siguiente procedimiento propuesto por Grassberger y Procaccia (1983) para la estimación de  $p$ , partiendo de la expresión:

$$p = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log C(\epsilon)}{\log(\epsilon)} \right\} \quad (10)$$

El método esencialmente consiste en graficar el  $\log C(c)$  el  $\log C(c)$  contra  $\log(c)$  y se observa la proporción de puntos sobre la cual el gráfico es aproximadamente lineal, la pendiente de la recta de regresión construida sobre esa porción es el estimador de la dimensión de correlación  $p$ . La dimensión de inmersión  $m$  se incrementa hasta que los valores de  $p$  se estabilicen. En la práctica se ajusta un modelo de regresión lineal:

$$\log C(\epsilon) = \beta_0 + \beta_1 \log C(c) + \xi$$

donde  $\xi$  es un término de error aditivo que se distribuye normal con media cero 0 y varianza constante  $\sigma^2$ , que es independiente de  $c$ . La dimensión de correlación se estima por  $\beta_1 = p$ .

## RESULTADOS

Para mostrar la metodología propuesta, se analizó una muestra de 28 individuos dividida en 2 grupos. En la primera muestra estudia el comportamiento de la frecuencia cardíaca fetal (fcf) en un grupo de 14 fetos sanos y en la segunda muestra se analiza un grupo de 14 fetos de embarazos con patología, ya sea, hipertensión, crecimiento fetal restringido (cfr) y anemia materna. Los datos provienen de registros tomados en el hospital Dr. Adolfo Prince Lara ubicado en la Ciudad de Puerto Cabello perteneciente al Estado Carabobo, Venezuela. Los registros de los fetos se obtuvieron a través de la monitorización electrónica antenatal utilizando un

**Tabla 1. Resumen estadístico de la dimensión de correlación estimada de los fetos sanos y fetos con patología**

GNPOCE	INNDOM	INVDO	Ø1	Ø2	Ø3	INURDO	INMOMDRM
INMOCDE	0.9307	0.9000	0.9200	0.9250	0.9475	0.9700	0.0004379121
Patología	0.9021	0.8400	0.8825	0.9000	0.9200	0.9400	0.0008489011

cardiotocograma marca Medison FM 50; se monitorea durante 15 minutos en condiciones basales, el registro en papel se digitalizó para su conservación y se analizó por medio de un programa denominado Engauge Digitizer. Este programa es desarrollado bajo la Licencia Pública GNU. Después de obtener todos los puntos digitalizados como frecuencias, se exportan de manera tabulada como texto plano, en formato CSV (data para Microsoft Excel).

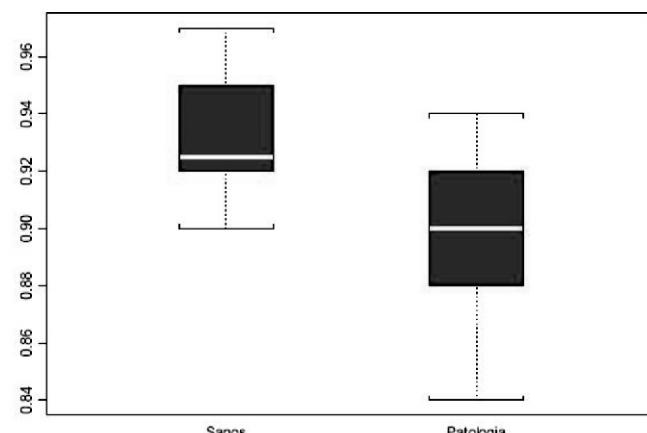
De esta manera se obtienen diferentes valores de la frecuencia cardíaca fetal medidas en el tiempo constituyéndose en una serie temporal. Para el análisis de las series temporales se usaron los paquetes: fdim implementado por Martínez *et al.* (2004) que permite calcular la dimensión fractal y el tseriesChaos implementado por Di Narzo (2005), utilizado para el análisis de series de tiempo no lineal. Ambos rutinas están implementadas bajo el ambiente de programación *R* desarrolladas bajo Licencia Pública GNU, de distribución libre. En la tabla 1, se muestra un resumen estadístico de la dimensión de correlación estimada de los fetos sanos y fetos con patología. También se puede observar la media, el valor mínimo, el primer cuartil, la mediana, el tercer cuartil, el valor máximo y la varianza muestral de cada muestra analizada.

En la figura 2, se muestra un boxplot de las dimensiones de correlación estimada para fetos sanos contra fetos que presentan patologías. En las figuras 4 y 5 se pueden observar: un histograma, un boxplot, la función de densidad de probabilidad y un gráfico de normalidad para las distintas muestras estudiadas que corresponden a las dimensiones de correlación estimadas a partir de fetos sanos y fetos con patología, respectivamente. Los gráficos muestran que los datos son normales. En la figura 5, se muestran 4 gráficos donde el primero denota la función de correlación, el segundo representa el índice de información mutua promedio (AMI); ambos gráficos son utilizados para determinar el tiempo de retardo o demora  $\tau$  en la serie temporal. En la parte de abajo de la misma figura están los gráficos que permiten determinar la dimensión de inmersión  $m$  de la serie; para tales fines se usó el criterio de información de Akaike y el

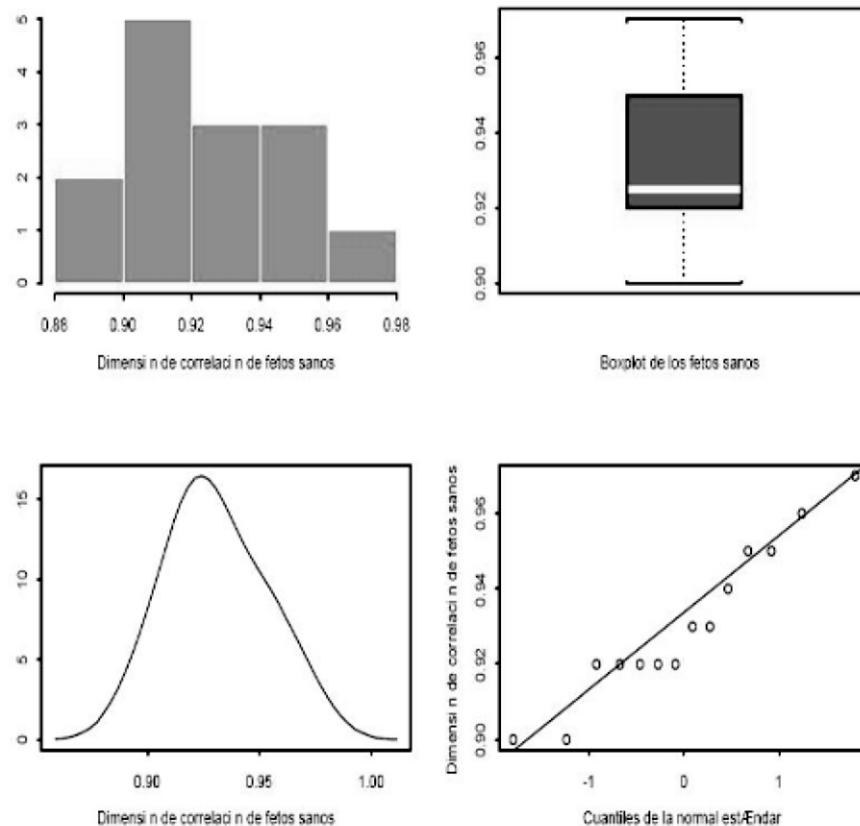
algoritmo del vecino falso; es decir, el tercer gráfico se obtiene ajustando un modelo autorregresivo lineal y se toma el valor de  $k$  que minimiza el criterio de información de Akaike,  $CIA(k)$  y el cuarto gráfico se obtiene utilizando el algoritmo del vecino falso. La serie representada en la figura 5 corresponde a una serie que proviene de un feto sano. En la figura 6, se muestran los mismos gráficos dados en 5, solo que el dato analizado es una serie temporal que corresponde a un feto que presenta patología.

En las figuras 7 y 8 se muestran dos gráficos de la integral de correlación muestral estimada para un feto sano y un feto con patología promedio de cada muestra con tiempo de retardo y de dimensión de inmersión con valores estimados iguales a  $\tau = 2, m = 3$  y  $\tau = 3, m = 4$  respectivamente.

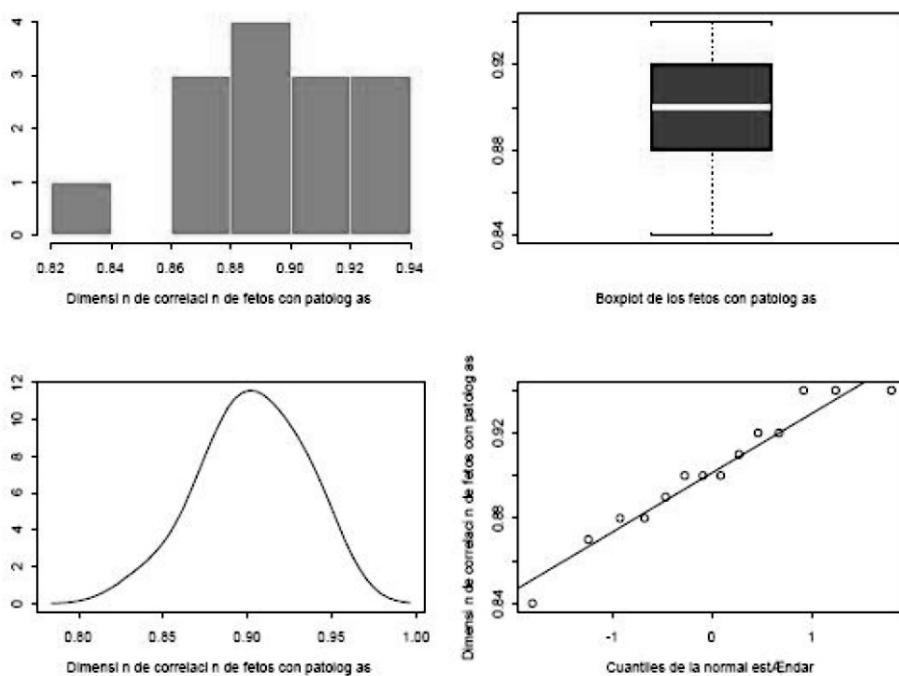
En las figuras 9 y 10, se muestran los atractores reconstruidos para un feto sano y un feto con patología promedio de cada muestra con sus respectivos tiempos de retardo y dimensión de inmersión estimados para valores iguales a  $\tau = 2, m = 3$  y  $\tau = 3, m = 4$ , respectivamente.



**correlación para fetos sanos y patológicos**



**Figura 3. Prueba de normalidad de los datos fetos sanos**



**Figura 4. Prueba de normalidad de los datos fetos patológicos**

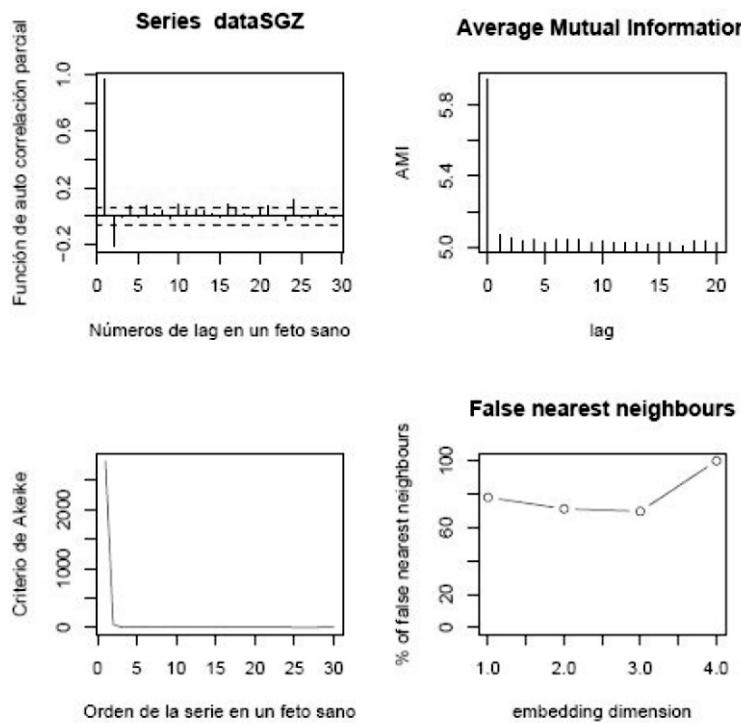


Figura 5. Espacio de fase feto sano ( $\tau = 2, m = 3$ )

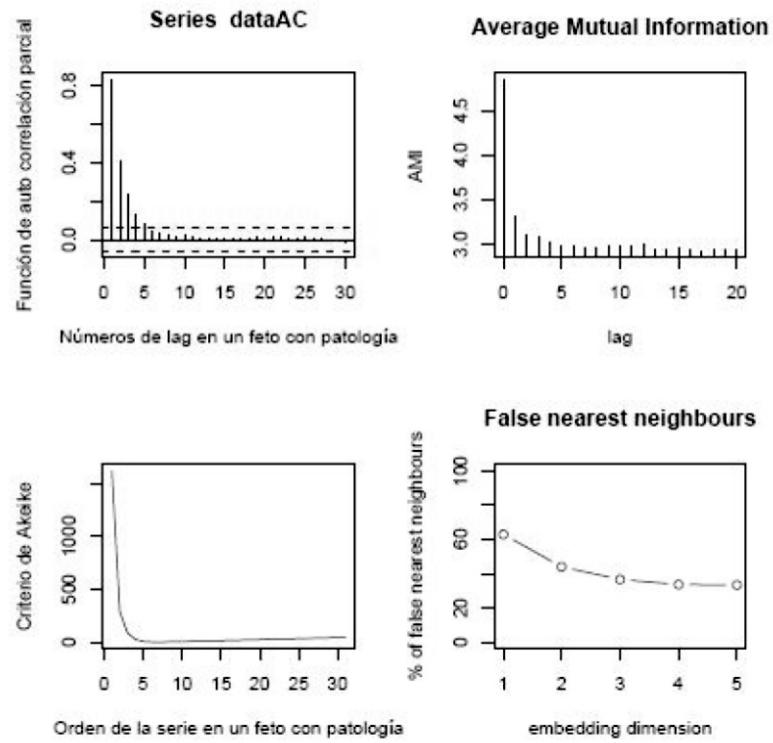
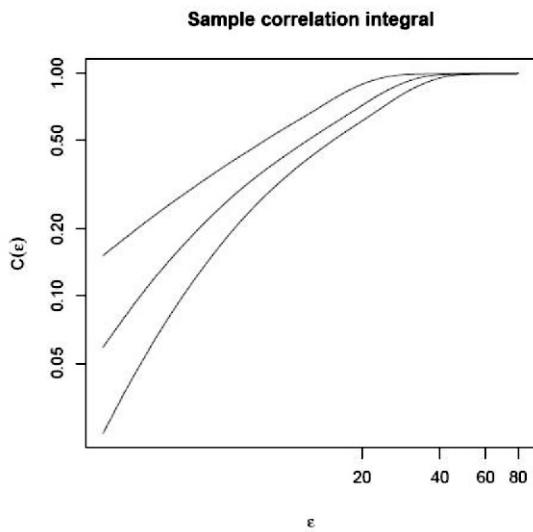
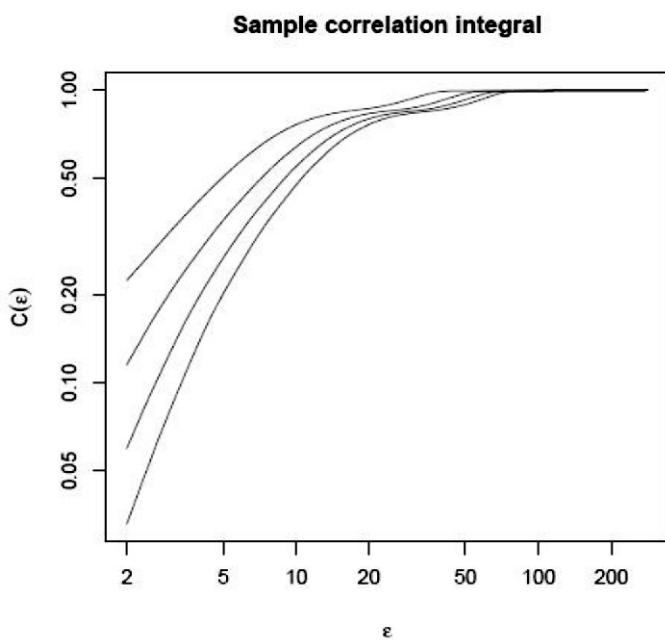


Figura 6. Espacio de fase de un feto patológico ( $\tau = 3, m = 4$ )



**Figura 7. Integral de correlación muestral: feto sano ( $\tau = 2, m = 3$ )**



**Figura 8. Integral de correlación muestral feto patológico ( $\tau = 3, m = 4$ )**

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Para lograr los objetivos trazados en este trabajo se analizaron dos grupos de señales cada uno de tamaño 14, se estimó la dimensión de correlación de ambos grupos de estudios y se realizó un test de hipótesis suponiendo que las muestras obtenidas

son independientes idénticamente distribuidas de poblaciones normales; es decir, se realizó una prueba  $t$  para la diferencia de medias, obteniéndose un  $t = 3.05$ , con un  $p$ -valor igual a 0.0093, indicando que hay diferencia significativa entre los promedios de las dimensiones de correlación entre fetos sanos y fetos con patologías. También se estima un intervalo de confianza del 95 % para las diferencias de medias igual a (0.0083, 0.048), el cual concuerda con los argumentos anteriormente esbozados; es decir, dicho intervalo no contiene el cero lo que implica que hay una diferencia entre las medias.

En la figura 2 se observa una marcada diferencia entre la dimensión de correlación estimada para los dos grupos de estudios; es decir, los fetos con patología presentan en promedio una dimensión de correlación inferior que los fetos sanos.

Un problema fundamental a considerar para reconstruir el espacio de fase mediante una serie temporal univariada es la selección de los parámetros  $m$  y  $\tau$  en el vector dado en (3). Si la demora reconstruida es muy pequeña las coordenadas del vector son muy parecidas y el atractor reconstruido se concentraría en la diagonal del espacio de fase. Por otro lado, si la demora reconstruida es muy grande las sucesivas coordenadas del vector de demora no están relacionadas y el atractor reconstruido no muestra la verdadera dinámica. En este trabajo se propusieron dos métodos para estimar el tiempo de retardo  $\tau$  y dos técnicas para estimar la dimensión de inmersión  $m$ . Para estimar  $\tau$  se utiliza la función de correlación y índice de información mutual promedio AMI. La función AMI puede ser considerada como una generalización de la función de autocorrelación que sólo suministra una medida de dependencia lineal de los datos. La función AMI promedia sobre todas las observaciones en función de ciertos retardos; específicamente, suministra un promedio de cierta cantidad de información sobre  $v_{ij}$  dado  $v_i$ . El mejor estimador del tiempo de retardo o demora es el primer  $m_{\text{mínimo}}$  de la serie AMI. Para un feto sano promedio se tiene que un valor de retardo aproximado es  $\tau = 2$  y  $m = 3$ ; y para un feto patológico promedio el  $\tau = 3$  y  $m = 4$ .

En las figuras 7 y 8 se puede observar que la integral de correlación muestral se estabiliza aproximadamente en  $C(\epsilon) \approx 0.94$  con  $\epsilon \approx 50$  para el feto sano, mientras que para el feto con patología se estabiliza en  $C(\epsilon) \approx 0.92$  con  $\epsilon \approx 90$ . En las figuras 9 y 10 se puede observar que la dinámica del atractor reconstruido para una feto promedio sano es muy

diferente al obtenido por un feto promedio con patología, es decir; la dinámica es mucho más compleja para el feto sano que el feto con patología.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se presentan una técnica para el análisis no lineal de series de tiempo que provienen de sistemas fisiológicos. En particular; se han analizado señales de la frecuencia cardíaca fetal, estos resultados a futuro podrían servir de ayuda para la elaboración de técnicas de diagnóstico de patologías, control de embarazos y discriminación de enfermedades cardíacas. También podrían ser utilizadas como análisis exploratorios, que sirvan de base para estudios más profundos.

Se estimó la dimensión de correlación de ambos grupos de estudios y se realizó un test de hipótesis resultando diferencias estadísticamente significativas entre los dos grupos de estudios. Se obtuvo un  $t = 3.05$ , con un p-valor igual a 0.0093.

La integral de correlación estimada con valores pequeños sugiere que la dinámica del sistema puede ser modelada por un sistema determinístico de baja dimensión.

La dinámica del atractor reconstruido para una feto promedio sano es muy diferente al obtenido por un feto promedio con patología, es decir; la dinámica es mucho más compleja en el feto sano que en el feto con patología.

No se trató la influencia de la frecuencia cardíaca materna en la señal fetal, aún cuando el software de captura del monitor fetal utilizado filtra este ruido, es una variable que está presente.

Los datos se obtuvieron el papel termosensible. Esto aporta un nivel de ruido muy elevado en los datos. Actualmente hay monitores fetales que digitalizan y filtran la señal, permitiendo además mayor tiempo de monitoreo, esto podría mejorar los resultados en estudios futuros.

Se dejó de lado la determinación de otros indicadores de complejidad tales como los exponentes de Lyapunov, mapas de Poincaré, análisis por componentes principales, dimensión de información y medidas de entropías entre otras.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a los revisores anónimos por las sugerencias aportadas para mejorar el manuscrito. También agradecemos al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad de

Carabobo, quién financió parcialmente esta investigación a través del proyecto CDCH 2006-003.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CASDAGLI, M. Chaos and deterministic versus stochastic nonlinear modelling. *Journal Royal of the Statistical Society Series B*, 54, 303-328. 1992.
- CASDAGLI, M. Recurrence plots revisited. *Physica*, D, 108:12-44. 1997.
- CARVAJAL, R.; VALLVERDU, M. y CAMINA, P. Análisis no lineal de la variabilidad de la frecuencia cardíaca en casos normales y cardiopatías. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, Vol XXI, 2: 29-34. 2000.
- DI NARZO, F. Analysis of nonlinear time series. *The tseriesChaos Package*. 2005.
- FRASER, A. y SWINNEY, H. Independent coordinates for strange attractors from mutual information, *Physical Review, A*, 33:1134. 1986.
- GRASSBERGER, P. y PROCACCIA, I. Characterization of strange attractors, *Physica Review Letter*, 50:346-349. 1983.
- GOLDSBERGER, A.; RIGNEY, D. y WEST, B. Chaos and fractals in human physiology, *Scientific American*, 262:42-49. 1990.
- HEGGER, R.; KANTZ, H. y SCHREIBER, T. Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package. *arXiv: chadyn/9810005 v1*, 1998.
- KANTZ, H y SCHREIBER, T. *Nonlinear time series analysis*, Cambridge University Press. 1997.
- KAPLAN, D. y GLASS, L. *Understanding nonlinear dynamics*, Springer, New York. 1995.
- KUGIUMTZIS, D. LILEKJENDLIE, B. CHRISTOPHERSEN, N. Part I: Estimation of invariant properties in state space, *arXiv: chao-dyn/9401004 v3*. 1995.
- MANDELBROT, B. *The fractal geometry of nature*. San Francisco: Freeman. 1982.
- MARTÍNEZ, J.; ORDIERES, J., CASTEJON, M. y DE LA COS, F. Functions for calculating fractal dimension. *The fdim Package*. 2004.
- KENNEL, M.; BROWN, R. y ABARBANEL, D. Determining embedding dimension for phase space reconstruction using a geometrical construction. *Physical Review, A*, 45, 3403. 1992.
- OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press. 1993.

- RICHTER, M y SCHREIBER, T. Phase space embedding of electrocardiograms. arXiv: chaodyn/9807035 v1. 1998.
- RUELLE, D. Chaotic evolution and strange attractors, Cambridge University Press. 1989.
- TAKENS, F. Detecting strange attractors in turbulence, lecture notes in math, 898, Springer, New York. 1981.
- THEILER, J. Estimating fractal dimension. Journal Optical Society of América, vol.7, 6, 1990.
- THEILER, J.; EUBANK, S.; LONGTIN, A.; GALDRIKIAN, B. y FARMER, D. Test for nonlinearity in time series: The method of surrogate data. Physica, D, 58, 77-94. 1992.
- SAUER, T.; YORKE, J. y CASDAGLI, M. Embedology, Journal Statistic Physica, 65, 579-616. 1991.
- SMITH, R. Estimating dimension in noisy chaotic time series. Journal Royal of the Statistical Society Series B, 54, No 2, 329-351. 1992.
- WOLFF, R. A note on the behavior of the correlation integral in the presence of a time series. Biometrika, 77. 689-697. 1990.

## OPTIMIZACIÓN DE LA CONECTIVIDAD DE REDES DE MAPAS ACOPLADOS MEDIANTE UN ALGORITMO GENÉTICO

**(Optimization of coupled map lattices connectivity using a genetic algorithm)**

Estévez, R.<sup>1</sup>; Tucci K.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, Universidad de Los Andes, Facultad de Ciencias, Mérida 5101, Venezuela.

<sup>2</sup>SUMA - CESIMO, Universidad de Los Andes, Facultad de Ciencias, Mérida 2105, Venezuela

Correo Electrónico: [ricardoestebas@yahoo.com](mailto:ricardoestebas@yahoo.com), [kay@ula.ve](mailto:kay@ula.ve)

### RESUMEN

La topología de interconexión de los sistemas complejos determina, en buena medida, el comportamiento macroscópico de los mismos. Este hecho hace pensar que existe algún tipo de red cuya conectividad puede maximizar o minimizar el valor de ciertos parámetros de orden del sistema. Para estudiar esta posibilidad se modifican las características del grafo de interconexión de la red mediante un algoritmo genético que, partiendo de una población inicial de redes de mapas acoplados, crea nuevas redes. En particular, se emplean redes de mapas logarítmicos acoplados con dinámica caótica de sus elementos y el parámetro de orden a minimizar es una función que involucra la desviación estándar y el número de enlaces promedio de los estados de los mapas. Para implementar el algoritmo genético se creó un operador genético que permite combinar matrices de acoplamiento para obtener una nueva generación de redes. Una vez que los mejores individuos de la población converjan, se caracterizan buscando propiedades topológicas comunes. Como resultado del proceso de optimización mediante algoritmo genético utilizado en este trabajo se obtuvo que el fenómeno de sincronización emerge con mayor facilidad sobre una topología de conectividad aleatoria tipo Erdos-Rényi.

**Palabras Clave:** Algoritmo genético, redes de mapas acoplados, optimización, grafos

### ABSTRACT

The interconnection topology of complex systems determines, in good measure, their macroscopic behaviour. This fact suggests that there is some sort of network connectivity which can maximize or minimize the value of certain parameters of order of the system. To explore this possibility, the interconnection graph features of the network are modified using a genetic algorithm that, starting with an initial population of coupled maps networks, creates new networks. In particular, coupled logarithmic map networks with chaotic dynamics of its elements are used and the parameter of order to minimize is a function that involves the standard deviation and the average number of links of the maps states. To implement the genetic algorithm, a genetic operator that allows to combine coupling matrixes is used to get a new generation of networks. Once the best individuals of the population converge, they are characterized looking for common topological properties. As a result of the optimization process through genetic algorithm used in this work it was obtained that the synchronization phenomenon emerges with greater facility on a random Erdos-Rényi topology.

**Key Words:** Genetic algorithm, coupled map networks, optimization, graph

## INTRODUCCIÓN

En los últimos tiempos ha aumentado el interés por estudiar sistemas complejos y en especial la relación que existe entre topología y dinámica de la red. Se ha determinado que la estructura de la red juega un rol importante en muchos casos, como por ejemplo en redes sociales, ecosistemas, redes neuronales, el cerebro, Internet o el Word Wide Web. Para estudiar este tipo de sistemas se han construido modelos donde, en general, cada nodo de una red sufre un proceso dinámico mientras está acoplado a otros nodos. El comportamiento colectivo del sistema depende fuertemente en la eficiencia de los caminos que comunican los nodos, la cual está dictada por la topología de la red (Fatihcan, M. 2004; Fatihcan, M. 2006 y Arenas, A. *et al.* 2006).

Particularmente, un gran número de estudios se han enfocado en la sincronización de redes de mapas acoplados, que son modelos de sistemas dinámicos donde el tiempo y el espacio permanecen discretos y los estados son continuos. Las redes de mapas acoplados fueron introducidas simultáneamente por (Kaneko, R. Kapral, R. y Kuznetsov, S. entre 1983 y 1984). Sin embargo, la mayoría de estos estudios se han hecho con una conectividad regular, es decir, cuando las unidades están acopladas sobre una red cuadriculada a sus vecinos más cercanos o cuando están acopladas globalmente. Últimamente se ha estudiado la sincronización con otros tipos de topología, como son las redes aleatorias (Alvárez, A. *et al.* 2007), la tipo mundo pequeño (Barahona y Pecora, 2002; Cosenza, M. y Tucci, K, 2002; Gómez, J. *et al.* 2007; Hong, H. *et al.* 2002), árboles (Cosenza, M. y Tucci, K, 2001), fractales (Tucci, K. y Cosenza, M., 2004; Mandelbrot, B. 1975; Mandelbrot, B. 1982), redes libres de escala (Donetti, L. 2008; Sorrentino, F. *et al.* 2006.), entre otras.

En este trabajo se busca determinar las propiedades topológicas de la red que faciliten el surgimiento del fenómeno de sincronización con el mínimo número de enlaces posible.

La sincronización es hacer que coincidan en el tiempo dos o más fenómenos, en nuestro caso

hacer que se aproximen en el tiempo los valores de los estados de los nodos de la red inducidas por el mapa acoplado. Para ello, partiendo de una población inicial de redes de mapas caóticos acoplados se utiliza un algoritmo genético para crear nuevas redes. Las redes se evalúan mediante una función que involucra la desviación estándar de los estados de los nodos y el número de enlaces promedio de la red. La desviación estándar es el parámetro de orden que refleja el estado de sincronización del sistema. El algoritmo genético aplica un operador genético a las matrices de acoplamiento diseñado para hacer evolucionar a la población de redes. El proceso se repite tantas veces como sean necesario para que la población converja a la estructura buscada. Por último se analizarán las redes resultantes para encontrar características comunes que reflejen la estructura de las redes obtenidas. Para ello se emplean algunas medidas como el coeficiente de agrupamiento; la longitud característica; el número de enlaces promedio, máximo y mínimo de los nodos de cada red; y la distribución de grados de la red.

## MÉTODO

Para este trabajo usaremos una red de mapas acoplados con acoplamiento difusivo, compuesta por  $N=5000$  nodos, y definida por:

$$x_i(t+1) = (1 - \epsilon)f(x_i(t)) + \frac{\epsilon}{N_i} \sum_{j \in v_i} f(x_j(t)), \quad (1)$$

donde,  $x_i(t)$  es el estado del elemento  $i$  en el tiempo discreto  $t$ ,  $I$  indexa los nodos con  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $\epsilon$  representa el coeficiente de difusión,  $f(x)$  es un mapa no lineal caótico y representa la dinámica local de cada nodo,  $v_i$  es el conjunto de nodos vecinos del elemento  $i$  cuya cardinalidad viene dada por  $N_i$ , por lo que la sumatoria es sobre todos los elementos  $j$  pertenecientes a la vecindad de  $i$ . La fuerza de acoplamiento se fijó en  $\epsilon = 0.41$ , de forma tal que los individuos poco aptos no llegasen a sincronizarse.

El mapa  $f(x)$  que se usa es el logarítmico, definido como:

$$x_{t+1} = f(x_t) = b + \ln |x_t|, \quad (2)$$

Donde,  $b$  es el parámetro de control. La elección del mapa logarítmico de base en la dificultad de sincronizarlos ya que en la región caótica,  $b \in (-1, 1)$ , no presentan ventanas periódicas.

El estado sincronizado en el tiempo  $t$  se define como  $x_i(t) = x_j(t) \forall i, j$ . La sincronización de los elementos de la red puede ser

Caracterizada mediante el promedio temporal ( $\sigma$ ) de la desviación estándar instantánea de los estados del sistema

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \bar{x}(t) - x_i(t)}{N}}, \quad (3)$$

Donde  $\bar{x} = \sum^N x_i(t)$ , es el promedio instantáneo de los estados de los nodos del sistema.

Para el proceso de optimización se define como el genotipo del individuo a la matriz de adyacencia del grafo, de tamaño  $N \times N$ , definida como

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{si } j \in \nu_i \\ 0 & , \text{de lo contrario} \end{cases}, \forall i, j. \quad (4)$$

El tipo de grafos utilizados en este trabajo son no dirigidos y sin bucles por lo que la matriz de adyacencia debe cumplir con  $M_{ij} = M_{ji}$  y  $M_{ii} = 0$  respectivamente.

La optimización de la población de las redes de mapas acoplados se lleva a cabo mediante un algoritmo genético que parte con una población inicial de redes de compuesta por: ochenta redes aleatorias con un grado de vértice promedio  $5 \leq k \leq 15$  (Erdos, P. y Rényi A, 1959; Erdos, P. y Rényi, A. 1960; Erdos, P. y Rényi, A. 1961); cinco redes regulares de dimensión  $d = 1, 2, \dots, 5$  y grado de vecindad  $\kappa = 1, 2, \dots, 5$ ; cinco redes small world con dimensión del sustrato inicial  $d = 1, 2, \dots, 5$ , grado de vecindad inicial  $\kappa = 1, 2, \dots, 5$  y probabilidad de reconexión  $p \in [0, 1]$  (Watts, D. y Strogatz, S., 1998), cinco redes

tipo árbol con ramificación  $r = 1, 2, \dots, 10$  (Cosenza y Tucci, 2001) y cinco redes fractales tipo triángulo de Sierpinski de dimensión  $d = 1, 2, \dots, 5$  (Cosenza y Tucci, 2002); para un total de 100 individuos. El tamaño de las redes es  $N = 5000$  nodos, por lo que el genotipo de cada individuo está compuesto por  $N = 25 \times 10^6$  genes. Con cada individuo se simula la dinámica de la red de mapas acoplados definida por su matriz de adyacencia utilizando el software ISyS, Inomogeneus System Simulator (Tucci, K. 2002). Luego se evalúa el desempeño del individuo usando la función objetivo  $\varphi$  y se actualizan los criterios de parada del algoritmo genético. De no cumplirse los criterios de parada, se crea una nueva generación mediante la aplicación de operadores genéticos de recombinación y mutación a la población actual. Esto último se repite hasta que se cumpla el criterio de parada.

La nueva generación está conformada por: los diez mejores individuos, diez individuos provenientes de la mutación de los diez mejores, diez individuos provenientes de la recombinación de los diez mejores con diez redes aleatorias que no sean las diez peores, treinta y cinco individuos que resultan de la recombinación aleatoria entre los ochenta individuos que no sean los diez mejores ni los diez peores, cinco nuevos individuos con red aleatoria, cinco con red regular, cinco con red small world, cinco con red tipo árbol y cinco con red fractal. Los parámetros usados para nuevos individuos son los mismos que los usados en la creación de la población inicial.

Como el tamaño de las redes tipo árbol y fractales depende de sus parámetros de construcción es necesario ajustar el algoritmo de construcción de la matriz de adyacencia para que esta represente un grafo de tamaño  $N = 5000$ . Para ello se trunca el algoritmo de construcción obteniendo grafos como los que se muestran en la figura 1.

Con el algoritmo genético se plantean dos búsquedas minimizando la función objetivo. La primera utiliza la función objetivo

$$\varphi_i = (\sigma) \quad (5)$$

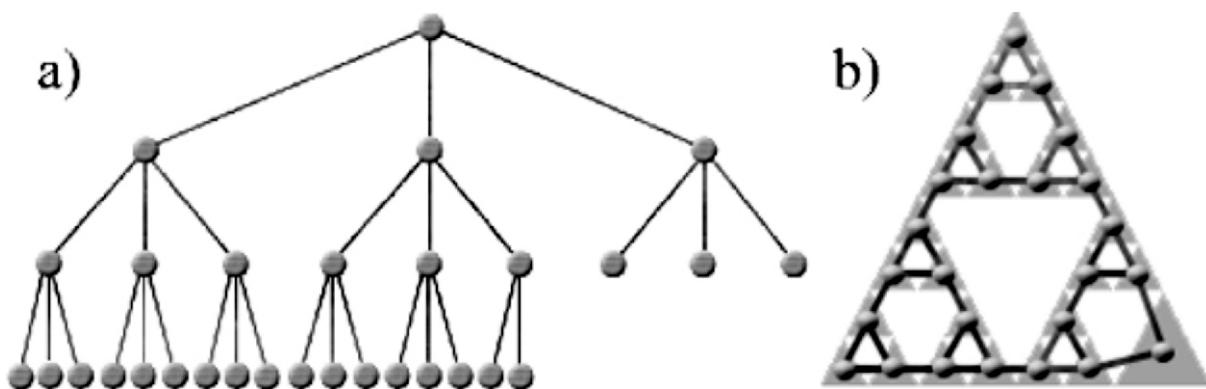


Figura 1. a) Red de 30 nodos con una estructura de árbol 3 regular. b) Red de 25 nodos en una estructura fractal de triángulo de Sierpinsky de dos dimensiones.

Nótese que esta función no limita el número de enlaces de la red lo que permite llegar eventualmente a una red globalmente acoplada (Cosenza y González, 1998; Cosenza y Parravano, 2001; Cosenza y Parravano, 1996).

Para evitar el aumento indiscriminado del número de enlaces del grafo se plantea una segunda búsqueda utilizando la función objetivo

$$\phi_i = (\sigma) + (k \times 10^{-5})$$

En la función objetivo  $\phi_i$ , el peso del número promedio de enlaces por nodo  $k$ , comienza a ser significativo una vez que el sistema sincronice, es decir cuando  $(\sigma) < 10^{-5}$ .

La nueva generación está conformada en parte por individuos resultantes de mutaciones y recombinaciones hechas sobre individuos de la población precedente. El operador de recombinación, que actúa sobre dos individuos representados por sus respectivas matrices de adyacencia  $A$  y  $B$  crea un nuevo individuo  $C$ . Para ello el operador crea el conjunto  $V_A$  con  $N/2$  nodos del parente  $A$  seleccionados aleatoriamente y otro conjunto  $V_B$

$V_B$  con los  $N/2$  restantes. De esta forma se tiene que  $V_A \cap V_B = \emptyset$  y  $V_A \cup V_B = 1, 2, \dots, N$ .

matriz de adyacencia  $C$  del hijo de  $A$  y  $B$  se define en dos pasos, en el primero se establecen los enlaces definidos por uno de los padres, es decir cuando  $i, j \in V_A$  con  $M = A$  o  $B$ , como

$$C_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} & , \text{ si } i, j \in V_A \\ B_{i,j} & , \text{ si } i, j \in V_B \end{cases} . \quad (7)$$

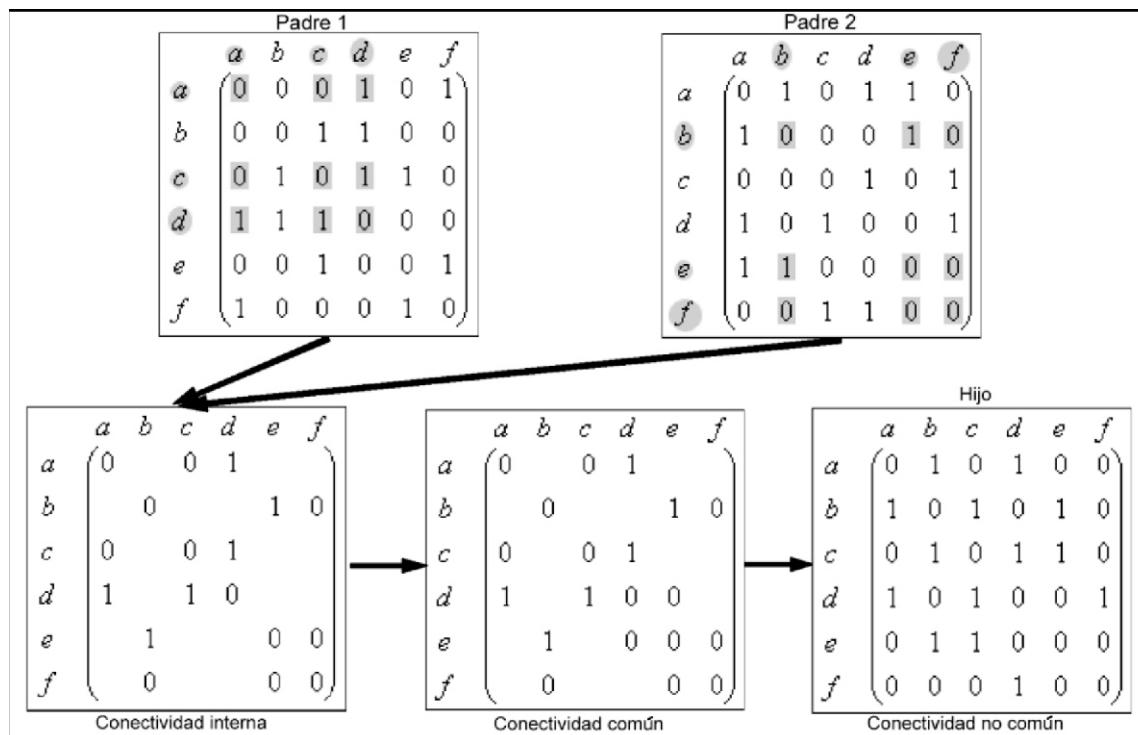
El segundo asigna los enlaces que conectan a los nodos de  $V_A$  con los de  $V_B$ , es decir cuando  $i \in V_A$  y  $j \in V_B$ , de forma tal que  $C_{ij} = A_{ij}$  o  $C_{ij} = B_{ij}$  con igual probabilidad. La figura 2 muestra un ejemplo de recombinación usando este operador.

Por último, para evitar que el algoritmo genético quede atrapado en un mínimo local, el 5% de los individuos que provienen del operador de recombinación sufre una mutación. A los individuos elegidos se les muta el 1% de sus genes, seleccionados de forma aleatoria, cambiando su estado; es decir, que se añade un enlace entre dos nodos desconectados o se elimina un enlace entre nodos conectados. Este cambio se representa en la matriz de adyacencia sustituyendo un 0 por un 1 o un 1 por un 0 respectivamente. Esta mutación no aplica a los elementos en la diagonal de la matriz de adyacencia,  $M_{ii}$  y como la matriz de adyacencia es simétrica al mutar a la componente  $M_{ij}$  también se muta la componente  $M_{ji}$ .

Con este conjunto de parámetros y condiciones, el algoritmo genético converge antes de las 100 generaciones. Con el fin de caracterizar la topología de los mejores grafos (Costa y Rodríguez, 2007), a los 10 mejores individuos de la última generación se les medirán el coeficiente de agrupamiento, la longitud característica y el grado de sus vértices.

El coeficiente de agrupamiento caracteriza la presencia de ciclos simples de orden tres y se define como

$$C = \frac{3N_\Delta}{N_3} , \quad (8)$$



**Figura 2. Proceso de recombinación.** En primer lugar se seleccionan las filas que cada parente heredaría al hijo, en este caso el parente 1 hereda las filas a, c y d; mientras el parente 2 las filas b, e y f. Tenemos dentro de cuadros grises los vértices que pasan directamente al hijo. Del resto de los elementos los que son comunes en ambos padres también se copian y finalmente cada uno de los no comunes se asignan copiando al azar a uno de los padres.

donde, el número de ciclos simples de grado tres dentro de la red,  $N_{\Delta}$ , viene dado por

$$N_{\Delta} = \sum_{k>j>i} M_{ij} M_{ik} M_{jk} . \quad (9)$$

Por su parte, el triple contexto  $N_3$  es un grupo de tres vértices donde hay un vértice central que se conecta a los otros dos directamente por medio de un enlace y se define como

$$N_3 = \sum_{k>j>i} (M_{ij} M_{ik} + M_{ji} M_{jk} + M_{ki} M_{kj}) . \quad (10)$$

En ambos casos las sumatorias son sobre el conjunto de vértices diferentes  $i, j$  y  $k$ .

La longitud característica es el promedio de la longitud de los caminos más cortos entre todos los posibles pares de vértices y se define como

$$l = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} d_{ij} , \quad (11)$$

donde,  $d_{ij}$  es la longitud del camino más corto que conecta a los vértices  $i$  y  $j$ .

Por su parte, el grado de un vértice  $i$ ,  $k_i$ , es el número de enlaces incidentes a  $i$ . El número de enlaces que posee el vértice de mayor grado dentro de un grafo se denomina  $k_{max}$  y el número de enlaces que posee el vértice de menor grado en toda la red se denomina  $k_{min}$ . El promedio de los grados de todos los vértices viene dado por

$$\bar{k} = \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{N} . \quad (12)$$

La distribución de grado,  $P(k)$ , indica la fracción de vértices de una red con grado  $k$ . Dependiendo del tipo de red la distribución puede ser de Poisson, exponencial, función delta y ley de potencias entre otros.

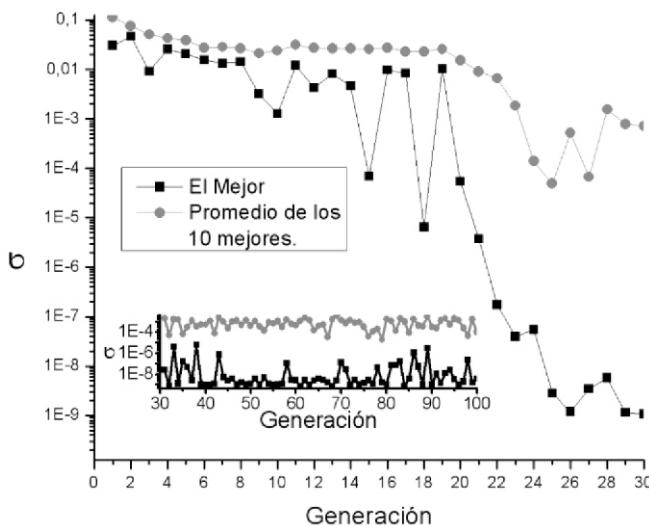
## RESULTADOS

En la figura 3, se muestra el progreso generacional del mejor individuo y de la media de los diez mejores

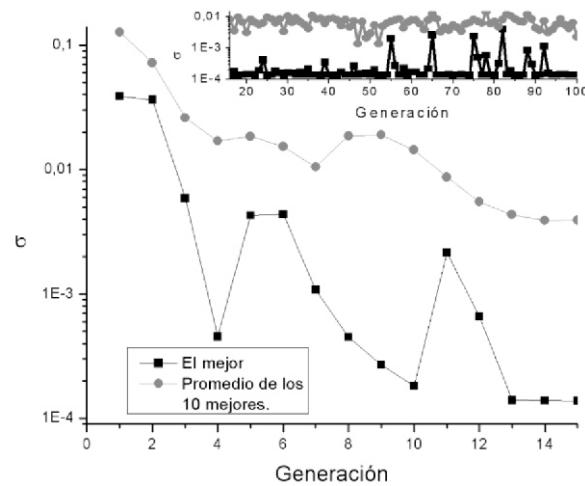
individuos utilizando la función objetivo  $\varphi = (\sigma)$ . En ella se observa una rápida tendencia a la convergencia tanto del mejor individuo como de la media de los diez primeros. La desviación estándar del mejor individuo converge en la generación 26, a partir de este punto se puede decir que el promedio de la desviación estándar instantánea del mejor individuo es  $(\sigma)10^{-8}$ , con oscilaciones alrededor de este valor<sup>1</sup>. Por su parte la media de la desviación estandar promedio de los diez mejores individuos se mantiene acotada  $(\sigma_{10}) < 10^{-3}$  a partir de la generación 25.

En la figura 4, también se muestra el progreso generacional, pero esta vez utilizando la función de evaluación  $\varphi_2 = (\sigma) + (k+10^{-5})$ . En este caso la convergencia es más rápida que en el caso anterior. La función de evaluación del mejor individuo converge en la generación 13 a  $\varphi_2 \approx 10^{-4}$ , igual que, en el caso anterior se observan oscilaciones alrededor de este valor. Del mismo modo, la media de los diez mejores converge a  $10^{-2}$ .

En la figura 5, podemos ver los valores de longitud característica y el coeficiente de agrupamiento de las diez mejores redes resultantes al aplicar la primera función objetivo,  $\varphi_1$ . Se puede apreciar que para las 10 redes los valores del coeficiente de agrupamiento es  $C \ll 1$  y también la longitud característica es  $l \ll N$ .

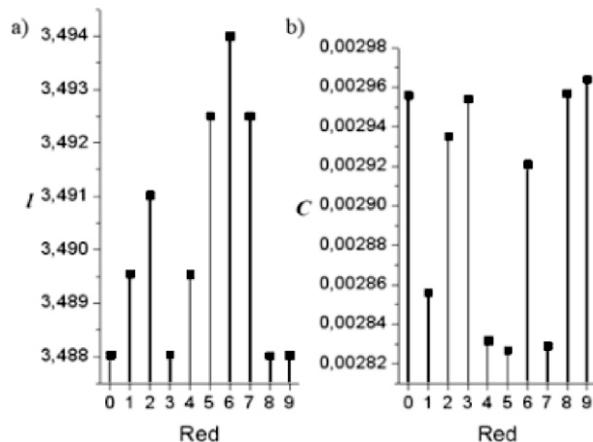


evaluación  $\varphi = (\sigma)$  del individuo más apto y de la media de los diez primeros. En un cuadro más pequeño se muestra el comportamiento de la función de evaluación en el área de convergencia.



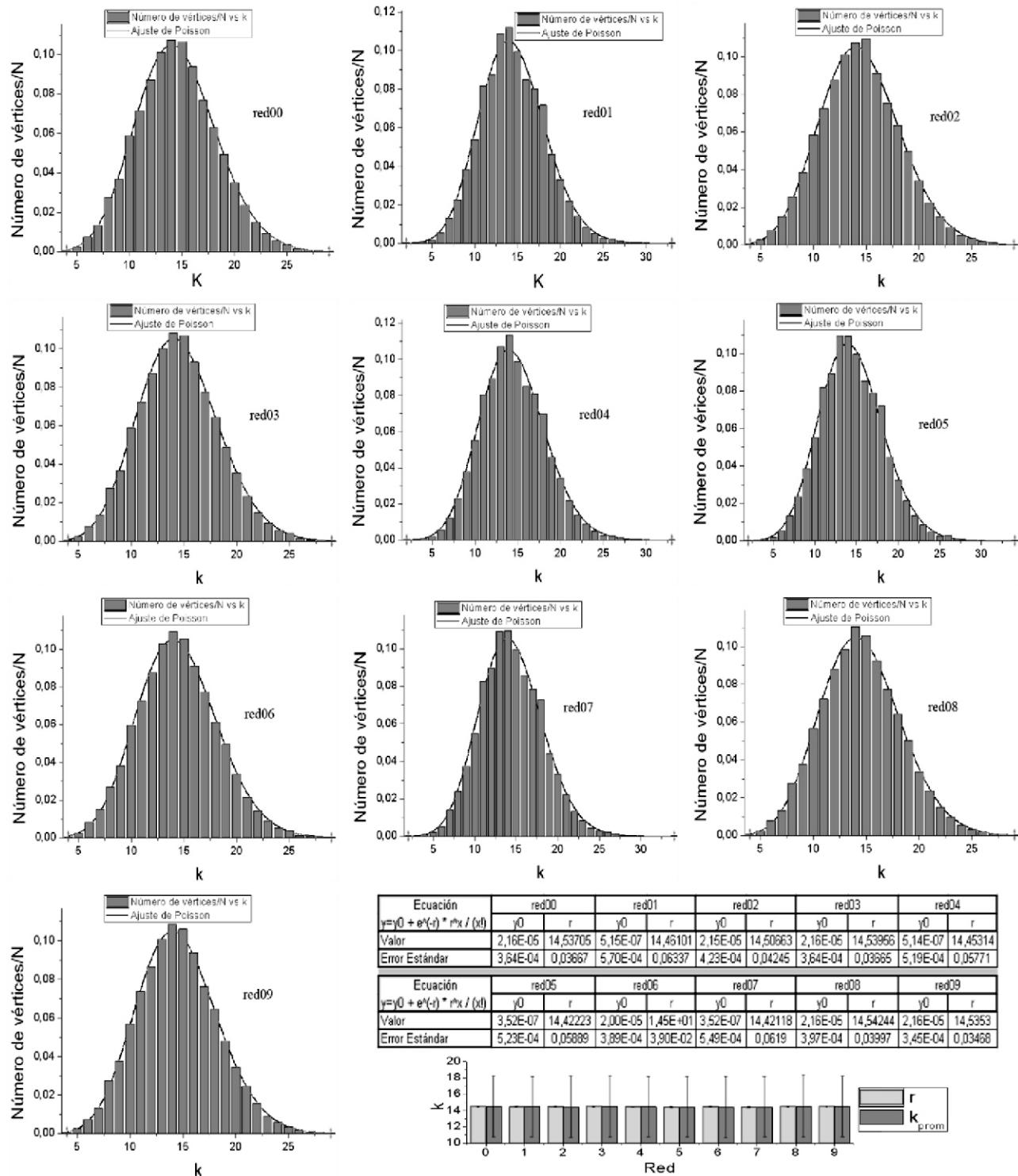
**Figura 4.** Progreso generacional de la función de evaluación  $f_2 = \sigma + (k+10^{-5})$  del individuo más apto y de la media de los diez primeros. En un cuadro más pequeño se muestra el comportamiento de la función de evaluación en el área de convergencia.

Las medidas del coeficiente de agrupamiento y la longitud características de las 10 mejores redes resultantes de la aplicación de la función objetivo  $\varphi_1$  se muestran en la figura 6. Al igual que en el caso anterior se tiene que  $C \ll 1$  y  $l \ll N$ . En ambos experimentos todas las redes resultantes son conexas. En las 10 mejores redes usando  $\varphi_1$  el rango de valores de  $k_{min} \in [2,4]$  y  $k_{max} \in [29,34]$ . La figura 7 muestra la distribución de grados de los vértices de las 10 mejores redes obtenidas al usar la función objetivo  $\varphi_1$ .



**Figura 5.** Valores de a) longitud característica y b) coeficiente de agrupamiento de las diez mejores redes resultantes para el primer experimento utilizando la función objetivo  $\varphi_1 = (\sigma)$ .

<sup>1</sup> El valor de  $(\sigma)$  es levemente mayor que cero debido a errores numéricos.



**Figura 7. Distribución de grado de las redes resultantes del algoritmo genético para  $\varphi_i = (\sigma)$ . Cada distribución tiene un ajuste de Poisson. En la esquina inferior derecha tenemos los valores de los parámetros del ajuste y la comparación del parámetro  $r$  del ajustes con el  $k$  tomado directamente de la red.**

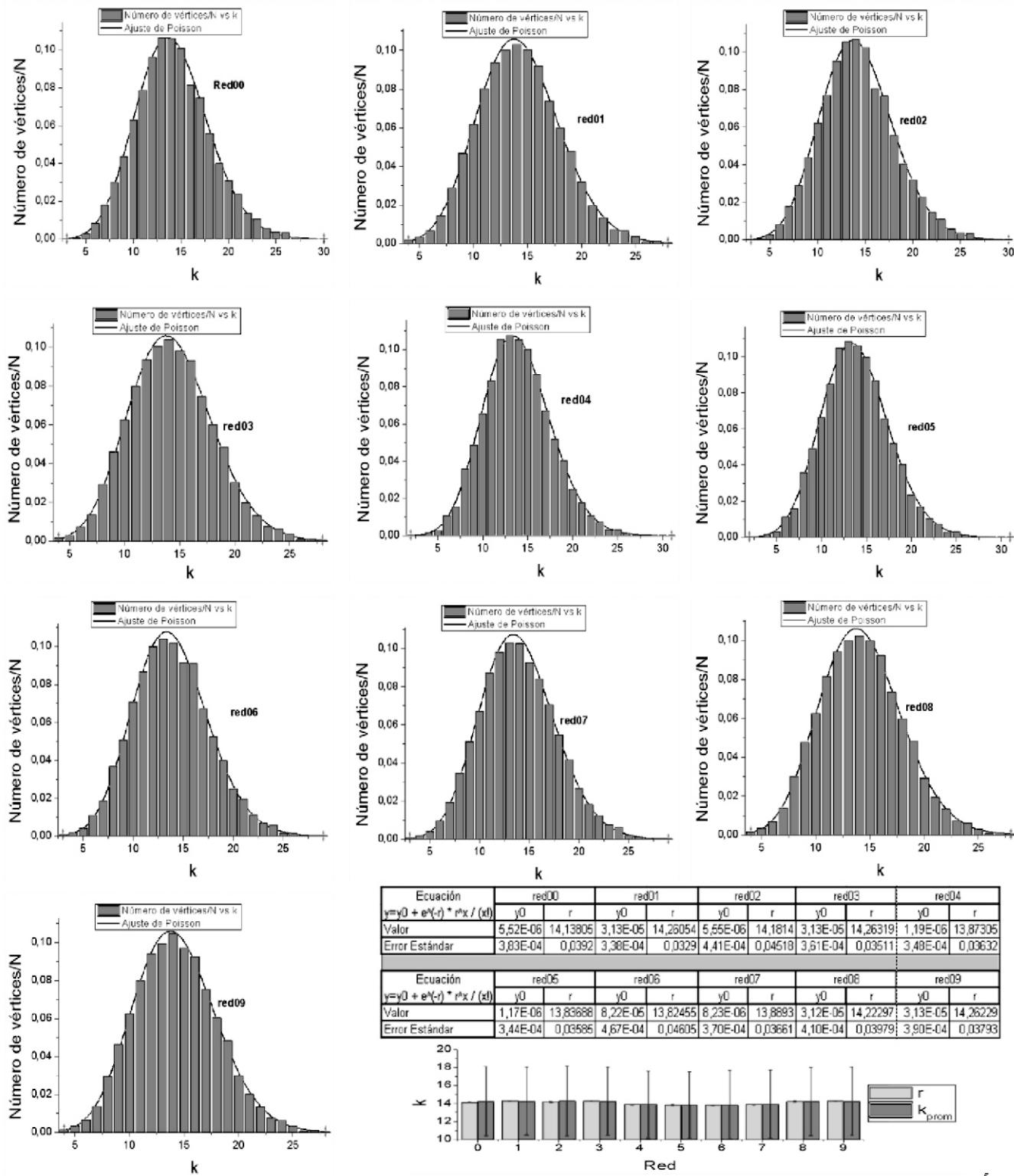


Figura 8. Distribución de grado de las redes resultantes del algoritmo genético para  $\varphi_2 = (\sigma) + k \times 10^{-5}$ . Cada distribución tiene un ajuste de Poisson. En la esquina inferior derecha tenemos los valores de los parámetros del ajuste y la comparación del parámetro  $r$  del ajuste con el de  $k$  tomado directamente de la red.

Nótese que en las redes resultantes la distribución de grados de los vértices se ajusta a una distribución de Poisson. La figura también muestra como los valores del parámetro  $r$  de la distribución de Poisson se ajustan con los valores de  $k$  tomados directamente de la red.

Al usar la segunda función objetivo,  $\varphi_2$  se tiene  $k_{min} \in [2,4]$  y  $k_{max} \in [28,31]$ .

La figura 8, muestra que para el segundo experimento, la distribución de grados de los vértices también se ajusta a una distribución de Poisson y los valores del parámetro  $r$  se ajustan con los valores de  $k$ .

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El hecho de que las mejores redes que se obtienen al aplicar el algoritmo genético tengan longitud característica  $l$  pequeña, coeficiente de agrupamiento pequeño y una distribución de grados de los vértices que se ajusta a una distribución Poisson hace pensar que entre el conjunto de posibles redes complejas: Aleatorias, tipo Small World, libres de escala, etc.; y no complejas: regulares, tipo árbol, fractales, etc.; son las redes aleatorias tipo Erdos Rényi las que permiten que surja el fenómeno de sincronización con más facilidad. Esto por lo menos para el conjunto de parámetros utilizados en este trabajo.

En cuanto a la restricción que se introdujo a la función objetivo  $\varphi_2$ , para evitar el crecimiento indiscriminado del grado de los vértices, se observa que a pesar que de hay un efecto en el nivel de sincronización que se obtiene en la red, no afecta sensiblemente las características topológicas que se midieron en este trabajo.

## CONCLUSIONES

El proceso de optimización mediante algoritmo genético utilizado en este trabajo dió como resultado redes cuya topología permite el fenómeno de sincronización en redes de mapas acoplados con más facilidad.

Con el conjunto de parámetros usados el estudio de las redes resultantes, por medio de la longitud característica, el coeficiente de agrupamiento y la distribución de grado de los vértices de cada red, las caracterizó claramente como redes aleatorias del

modelo de Erdos-Rényi.

El uso de diferentes funciones objetivo altera ligeramente el valor de  $k$  pero no el tipo de red resultante.

La investigación hecha en este trabajo puede ser enfocada en otras direcciones. Usando el mismo modelo de algoritmos genéticos se puede buscar las características topológicas de las redes que maximicen o minimicen otras propiedades colectivas emergentes como por ejemplo la formación de dominios, la separación de fases, el surgimiento de turbulencia, entre otras. También es posible utilizar otros caracterizadores de la topología de los grafos además de la longitud característica, el coeficiente de agrupamiento y la distribución de los grados de los vértices; como por ejemplo la vulnerabilidad, el grado de bipartividad, la dimensionalidad fractal, entre otros.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado en parte por el Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico de la Universidad de los Andes en Mérida, Venezuela, bajo la subvención I-886-05-02-A.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVÁREZ, O.; TUCCI, K. COSENZA, M. Y PINEDA,M. Random global coupling induces synchronization and non-trivial collective behavior in networks of chaotic maps, European Physical Journal ST, 143, 245. 2007.
- ARENAS, A. DIAZ, A.; CONRAD, J. y PÉREZ, V. Synchronization Reveals Topological Scales in Complex Networks, Phys. Rev. 96:114102.2006.
- BARAHOMA, M. y PECORA, L. Synchronization in small-world systems, Phys. Rev. Lett, vol. 89(5):054101, 2002.
- COSENZA, M. y GONZÁLEZ, J. Synchronization and Collective Behavior in Globally Coupled Logarithmic Maps, Progress of Theoretical Physics, 100, 21. 1998.
- COSENZA, M. y PARRAVANO, A. Dynamics of Coupling Functions in Globally Coupled Maps: Size, Periodicity and Stability of Clusters, Physical Review E, 64, 036224, 2001.
- COSENZA, M. y PARRAVANO, A. Turbulence in Globally Coupled Maps, Physical Review E, 53, 6032.1996.

- COSENZA, M. y TUCCI, K. Pattern Formation on Trees, *Physical Review E*, 64: 026208.2001.
- COSENZA, M. y TUCCI, K. Turbulence in small-world networks, *Physical Review E*, 65:036223. 2002.
- COSTA, F.; RODRÍGUEZ, A.; TRAVIESO, G. y VILLAS, P. Characterization of Complex Networks: A Survey of measurements, *Advances in Physics* 56:167-242. 2007.
- DONETTI, L.; HURTADO, P. y MUÑOZ, M. Network synchronization: Optimal and Pessimal Scale-Free Topologies, *J. Phys. A* 41, 224008, 2008.
- ERDÖS, P. y RÉNYI, A. On random graphs, *Publicationes Mathematicae*, 6:290-297, 1959.
- ERDÖS, P. y RÉNYI, A. On the evolution of random graphs, *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* 5:17-61. 1960.
- ERDÖS, P. y RÉNYI, A. On the strength of connectedness of a random graph, *Acta Mathematica Scientia Hungar.*, 12:261-267, 1961.
- FATHICAN, M.; JÜRGUEN, J. y ANDREAS, W. Delays, connection topology, and synchronization of coupled chaotic maps, *Phys. Rev.* 92:144101, 2004.
- FATHICAN, M.; TÜRKER, B.; y JÜRGUEN, J. On the synchronization of networks with prescribed degree distributions, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, Vol. 53(1): 92-98. 2006.
- GÓMEZ, J.; MORENO, J. y ARENAS, A. Paths to Synchronization on Complex Networks, *Phys. Rev.* 98:034101.2007.
- HONG, H.; CHOI, M. y BEOM, J. Synchronization on small-world networks, *Phys. Rev. E* 65: 026139. 2002.
- KANEKO, K. Period doubling of kink antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled map lattices, *Prog. Theor. Phys.*, 72 :480-486. 1984.
- KANEKO, K. Spatial period-doubling in open flow, *Phys. Lett.* A111 321 325, 1985.
- KAPRAL, R. Pattern formation in two dimensional arrays of coupled discrete time oscillators, *Phys. Rev.* A31 3868-3879, 1985.
- KUZNETSOV, S. On model description of coupled dynamical systems near the transition point order-disorder, *Izv. VUZov-Fizika* 27: 87-96.1984.
- KUZNETSOV, S. On critical behavior of one dimensional lattices, *Pisma J. Technich. Fiz.* 9: 94-98.1983.
- MANDELBROT, B. *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company.1982.
- MANDELBROT, B. *Les objets fractals, forme, hasard et dimension*, Paris: Flammarion. 1975.
- SORRENTINO, F.; Di BERNANDO, M. y HUERTA, G. y BOCCALETI, S. Synchronization in weighed scale-free networks with degree correlation, *Physica D*. 224:123-129. 2006.
- TUCCI, K. Procesos dinámicos espacio-temporales en Redes Inhomogéneas, Tesis Doctoral, Universidad de los Andes. 2002.
- TUCCI, K. y COSENZA, M. Spectral properties and pattern selection in fractal growth networks, *Physica D*, 199, 91. 2004.
- WALLER, I. y KAPRAL, R. Spatial and temporal structure in systems of coupled non-linear oscillators, *Phys. Rev.*, A30: 2047-2055.1984.
- WATTS, D. y STROGATZ, S. Collective dynamics of small-world networks, *Nature*, 393:440-442. doi:10.1038/30918. 1998.

## EFECTO DE LA DENSIDAD DE VEHÍCULOS DE TRANSPORTE PÚBLICO EN LA FLUIDEZ DEL TRÁFICO: UN MODELO AUTÓMATA CELULAR

(Effect of the density of public transportation vehicles in traffic flow: a cellular Automata model)

Márquez, J.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centro de Física Fundamental, Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.  
Correo Electrónico:[victormarquez@ula.ve](mailto:victormarquez@ula.ve)

### RESUMEN

El transporte de personas y bienes de un sitio a otro dentro de cualquier centro urbano está relacionado principalmente con la actividad económica, lo cual hace que su estudio tenga una gran importancia para el mejor desenvolvimiento de las actividades generadas en el medio urbano. Con la introducción de un modelo basado en autómatas celulares se demuestra que, en un tramo de una cierta vía urbana, la densidad de tráfico tiende a aumentar en la medida en que se incrementan las unidades de transporte público colectivo que circulan en esa vía.

**Palabras Clave:** Densidad de tráfico, autómatas celulares.

### ABSTRACT

Goods and public transportation from one place to another in any urban space is mainly related to economic activity, which makes it an important study for the best development of all activities there. Using a cellular automata model it has been shown that in a section of any urban road the traffic density increases whenever more public transportation passes through it.

**Key Words:** Traffic density, cellular automata

## INTRODUCCIÓN

Los estudios de transporte y vialidad tienen una gran importancia para el desarrollo urbano local de una ciudad. Estos estudios se caracterizan por el análisis de la estructura y el funcionamiento de los sistemas de vialidad y las modalidades de transporte con el fin de determinar y caracterizar los principales problemas que afectan el desenvolvimiento normal de las actividades propias del medio urbano, para así poder llegar a la proposición de soluciones factibles y que no requieran de un largo tiempo para llevarse a cabo (MINDUR, 1981).

Actualmente, existe una mayor demanda de transporte público debido al incremento de la población y la multiplicidad de rutas y viajes que realiza esta población para desplazarse, hecho que genera un desequilibrio entre el aumento de rutas y medios de transporte y la necesidad de mejoramiento del sistema vial, tal desequilibrio se ha transformado en problemas para la población en las ciudades, ya que al producirse congestiones, éstas a su vez generan contaminación y pérdidas de tiempo que, en cierto modo, tienen que ver con pérdidas económicas (Agenda Hábitat España, 1997). Parte de los estudios llevados a cabo para proponer soluciones a estos problemas están relacionados con el modelado de flujo de tráfico vehicular. Este modelado se puede basar, ya sea en teorías con enfoque macroscópico, como la teoría de gases y dinámica de fluidos, o en teorías con enfoque microscópico, como las desarrolladas sobre autómatas celulares (Ramírez, M. 2004).

Los modelos que utilizan autómatas celulares para modelar flujo de tráfico tienen la ventaja de poder utilizarse eficientemente en la simulación por computadora debido a que manejan una dinámica que evoluciona en pasos discretos. Un autómata celular consiste en una estructura de celdas en un espacio dado, en un conjunto de variables que definen el estado de la celda y en un conjunto finito de reglas que especifican cómo evolucionan los estados de las celdas (Wolfram, S. 1986).

En este artículo se presenta un modelo tipo autómata celular para el estudio de tráfico.

Específicamente, investigamos el efecto de la densidad de vehículos de transporte público y de vehículos particulares en la fluidez del tráfico en una vía unidireccional.

## MÉTODO

El modelo que se plantea representa un tramo de una vía local urbana unidireccional con un solo canal de circulación. La representación del tramo se hace por medio de una matriz de tamaño  $L \times 3$ , donde  $L$  corresponde a la longitud del tramo, expresado en número de celdas. En este trabajo fijaremos  $L = 40$ . Cada elemento de la matriz, que representa una celda, puede tomar los siguientes valores:

- 0 Espacio vacío.
- 1 Vehículo particular.
- 2 Autobús.
- 3 Acera.
- 4,5,6 Parada de autobús.



Figura 1. Ilustración del movimiento de los vehículos

Los vehículos particulares y colectivos públicos (autobuses) solo pueden avanzar si la celda próxima a ellos está desocupada, realizando cada autobús sus respectivas paradas en los espacios asignados, donde el tiempo que tardan en hacer el montaje y desmontaje de pasajeros es aleatorio. La figura 1 y la figura 2, ilustran la transmisión entre los estados de las celdas.

El modelo permite variar el porcentaje de celdas ocupadas por vehículos o autobuses con respecto a celdas de espacios vacíos y el porcentaje de autobuses que circulan respecto a vehículos particulares.

El porcentaje total de celdas ocupadas se define en este caso como el valor probabilístico de ocupación vehicular  $G_n$ , donde  $n$  representa la fracción de espacios ocupados por vehículos (colectivos o particulares) circulantes con respecto al número de espacios vacíos. Esta cantidad se expresa como

$$G_n = \frac{n}{10} \times 100, \quad n = 1, 2, 3, \dots, 10. \quad (1)$$

3 1 3	3 0 3	3 0 3	3 0 3	3 0 3
3 0 3	3 1 3	3 0 3	3 0 3	3 0 3
3 0 3	3 0 3	3 1 3	3 0 3	3 0 3
4 2 3	5 2 3	4 0 3	4 1 3	4 1 3
3 2 3	3 0 3	3 2 3	3 2 3	3 0 3
3 0 3	3 2 3	3 2 3	3 0 3	3 2 3
3 1 3	3 1 3	3 0 3	3 2 3	3 0 3
3 2 3	3 0 3	3 1 3	3 0 3	3 2 3
3 0 3 $\Rightarrow$	3 2 3 $\Rightarrow$	3 0 3 $\Rightarrow$	3 1 3 $\Rightarrow$	3 0 3
3 0 3	3 0 3	3 2 3	3 0 3	3 1 3
3 0 3	3 0 3	3 0 3	3 2 3	3 0 3
3 1 3	3 1 3	3 0 3	3 0 3	3 2 3
3 2 3	3 0 3	3 1 3	3 1 3	3 1 3
4 0 3	4 2 3	5 2 3	6 2 3	4 0 3
3 0 3	3 0 3	3 0 3	3 0 3	3 2 3
3 1 3	3 0 3	3 0 3	3 0 3	3 0 3
3 0 3	3 1 3	3 0 3	3 0 3	3 0 3

**Figura 2. Representación de la evolución temporal de un fragmento de la matriz que representa el tramo de la vía urbana**

El porcentaje total de celdas ocupadas por vehículos de transporte público se define en este caso como el valor probabilístico de ocupación vehicular de transporte público  $P_m$ , donde  $m$  representa la fracción de vehículos de transporte público circulantes con respecto al número de vehículos particulares. Esta cantidad se expresa como

$$P_m = \frac{m}{10} \times 100, \quad m = 1, 2, 3, \dots, 10. \quad (2)$$

El algoritmo utilizado es el siguiente:

1. Creación de la avenida.
2. Creación de vehículos y autobuses en la primera fila.
3. Movimiento de vehículos y autobuses.
4. Conteo de tráfico.

El tiempo y el espacio para el avance de los vehículos y autobuses son discretos. El conteo del tráfico se hace llevando el control de los vehículos y autobuses que entran y salen del tramo de la vía en estudio, y esto permite calcular la densidad de tráfico  $\varphi$ , que es el número de vehículos o autobuses que hay en un tramo de vía, y en este caso se expresa como

$$\varphi = \frac{E - S}{L} \quad (3)$$

donde  $E$  es el número de vehículos particulares y autobuses que entran,  $S$  es el número de vehículos particulares y autobuses que salen, y  $L$  es la longitud del tramo de vía.

## RESULTADOS

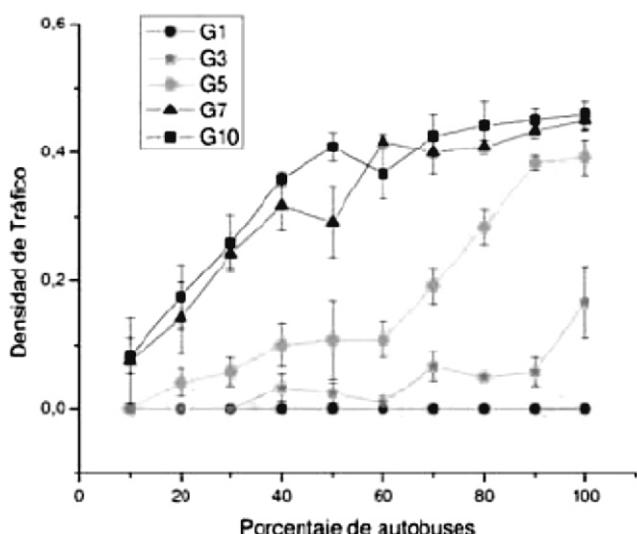
Tomando en cuenta que el tiempo que los autobuses tardan en hacer las paradas es aleatorio, se hicieron varias pruebas, dejando fijo  $G_n$  para cada valor de  $n$  y variando  $m$  en  $P_m$  para cada prueba. Luego se obtuvieron promedios de los distintos valores densidad de tráfico con respecto a cada valor de  $P_m$ . En la figura 1, se puede apreciar cómo varía la densidad de tráfico  $\varphi$  a medida que incrementa el valor probabilístico de ocupación vehicular de transporte público  $P_m$  para distintos valores probabilísticos de ocupación  $G_n$ .

## DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Distintos valores de  $G_n$  corresponden a valores de densidad de tráfico muy cercanos que incluso en algunos casos coinciden. Esto se aprecia en la figura 1 cuando  $n$  tiene valores altos ( $n=7$  y  $n=10$ ) y cuando  $n$  tiene valores bajos ( $n=1$  y  $n=3$ ). El otro valor probabilístico de ocupación vehicular ( $n=5$ ) difiere de los demás casos, ya que, al aumentar el valor probabilístico de ocupación vehicular de transporte

probabilístico de ocupación vehicular de transporte público, los valores de densidad de tráfico no se superponen, y los errores obtenidos debido al promedio de las densidades de tráfico de las distintas pruebas son mayores.

A excepción de los valores probabilísticos de ocupación bajos como en  $n = 1$ , para el cual no se presentan cambios, la densidad de tráfico para el resto de los valores de  $n$ , tiende a aumentar en la medida en que se incrementa el porcentaje de autobuses con respecto a vehículos particulares.



**Figura 3. Variación de la densidad de tráfico debido al aumento del porcentaje de circulación de autobuses.  $G_n$  con  $n = 1, 3, 5, 7, 10$  representan las variaciones para diferentes cantidades de vehículos o autobuses que circulan en relación a espacios vacíos.**

## CONCLUSIONES

Con un modelo basado en autómatas celulares hemos estudiado el flujo de tráfico en un tramo de una vía urbana unidireccional. Nuestros resultados muestran que la densidad de tráfico tiende a aumentar con el incremento de unidades de transporte colectivo (autobuses). En el modelo planteado, el tiempo de parada de los autobuses para el montaje y desmontaje de pasajeros es aleatorio y, debido a esto, se generan conflictos de fluidez y de desplazamiento vehicular. Por lo tanto, cabe suponer que un control del tiempo de parada y del porcentaje de autobuses respecto a vehículos particulares pueden contribuir a generar una

mayor fluidez en el tráfico urbano.

Los modelos que utilizan autómatas celulares constituyen herramientas computacionalmente eficientes a la hora de realizar estudios y diagnósticos relacionados con la problemática vial y de transporte público de pasajeros, ya que permiten plantear respuestas y soluciones a problemas relacionados con tráfico vehicular.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a K. Tucci y a M. Cosenza por fructíferas discusiones, y a Jorge Moreno por asesoría en la parte computacional.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AGENDA HABITA ESPAÑA. Los nuevos conflictos de la ciudad y el territorio, obtenido de World Wide Web <http://habitat.aq.upm.es/aghab/aghabes5.html>. 1997.
- MINDUR. Dirección de coordinación de planes y programas viales. Manual de Vialidad Urbana, Caracas. 1981.
- RAMÍREZ, M.; MARTÍN, M. Modelado y Simulación del tráfico vehicular empleando autómatas celulares. FCC, BUAP, Pue. México, Abril. 2004.
- WOLFRAM, S. Theory and applications of cellular Automata World Scientific. 1986.

**EMERGENCIA DE REDES DE PEQUEÑO MUNDO EN SISTEMAS COEVOLUTIVOS  
DE MAPAS CAÓTICOS ACOPLADOS****(Emergence of small-world networks in coevolving systems of coupled chaotic maps)**<sup>1</sup>Chipía, M.; <sup>1</sup>Cosenza, M.<sup>1</sup>Centro de Física Fundamental, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.  
Correo electrónico: [ajejachipia@gmail.com](mailto:ajejachipia@gmail.com)**RESUMEN**

Se investiga un modelo de mapas caóticos acoplados donde la estructura de conectividad depende de los estados de los mapas. Las propiedades topológicas de la red de conectividad se cuantifican mediante el coeficiente de agrupamiento y la distribución de probabilidad de las conexiones. Partiendo de diferentes tipos de redes de conectividad iniciales, las conexiones entre los mapas son recableadas en busca de una sincronización en el sistema. Se encuentra que, independientemente de la red inicial, existe un valor crítico de la intensidad de acoplamiento entre los mapas por encima del cual el sistema alcanza una estructura de red de pequeño mundo. Este mecanismo podría explicar el origen de muchas redes de pequeño mundo en la naturaleza.

**Palabras Clave:** Mapas caóticos. Sincronización., redes de pequeño mundo, coevolución.**ABSTRACT**

We investigate a model of coupled chaotic maps where the connectivity structure depends on the states of the maps. The topological properties of the network are quantified through the clustering coefficient and the probability distribution of connections. Starting from different types of networks, the connections between the maps are rewired in search of synchronization in the system. It is found that, independently of the initial network, there exists a critical value of the parameter describing the coupling between the maps above which the system reaches a small world structure. This mechanism may explain the origin of many small-world networks in Nature.

**Key Words:** Chaotic maps, synchronization, small-world networks, coevolution.

## INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que las redes de pequeño mundo (Watts y Strogatz, 1998) pueden describir propiedades de conectividad de muchos sistemas naturales y artificiales. Una red de pequeño mundo posee una longitud característica entre nodos pequeña y un coeficiente de agrupamiento grande. En particular, se ha encontrado que una gran variedad de sistemas complejos, tales como las redes neuronales, cadenas de reacciones enzimáticas, propagación de epidemias, la world wide web, redes sociales, entre otras, son bien modelados mediante una estructura de pequeño mundo. Entre otras propiedades, se ha demostrado que las redes de pequeño mundo optimizan la transmisión de información en los sistemas (Newman *et al.* 2006).

La pregunta fundamental que ha intrigado a los investigadores durante los últimos años es ¿cuál es el mecanismo que da origen a una estructura de pequeño mundo en un sistema? (Zimmermann, *et al.* 2004, Holme y Newman 2006). En este artículo exploramos un modelo propuesto recientemente (Gong y Leeuwen, 2004) como un posible mecanismo para la emergencia de una red de pequeño mundo en un sistema de mapas caóticos. Mostramos como la búsqueda de sincronización entre los elementos de un sistema conduce a una topología de conectividad con propiedades de pequeño mundo. Específicamente demostramos que la evolución hacia una red de pequeño mundo basada en esta dinámica es un proceso robusto, es decir, es independiente de la estructura de la red inicial que forman los elementos caóticos interactivos.

## MODELO

Consideramos un sistema de  $N$  mapas acoplados de la forma (Gong y Leeuwen, 2004)

$$x_{n+1}^i = (1 - \epsilon)f(x_n^i) + \frac{\epsilon}{N_i} \sum_{j \in v_i} f(x_n^j). \quad (1)$$

donde  $x_n^i$  es el estado del elemento  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) en el instante de tiempo discreto  $n$ ;  $v_i$  es el conjunto de vecinos acoplados directamente con  $i$  en ese instante y  $N_i$  es la cardinalidad de ese conjunto. La conexión se supone bi-direccional. El parámetro  $\epsilon$  mide la intensidad del acoplamiento entre los elementos y  $f(x)$  es el mapa que describe la dinámica local caótica. En este trabajo asumiremos un mapa logarítmico  $f(x) = b + \ln|x|$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ , como

dinámica local. Este mapa presenta caos robusto, sin ventanas periódicas ni bandas caóticas separadas, en el intervalo de parámetro  $b \in [-1, 1]$  (Kawabe y Kondo, 1991). En lo que sigue, emplearemos el valor fijo  $b = -0,70$  para este mapa local en la ecuación (1). El tamaño del sistema que utilizamos es  $N = 300$  y el número de conexiones totales entre los elementos del sistema se ha fijado en  $Lc = 5200$ .

La coherencia  $d_{ij}(n)$  entre el mapa  $i$  y el mapa  $j$  se define como

$$d_{ij}(n) = |x_i - x_j| \quad (2)$$

La cantidad  $d_{ij}(n)$  mide el grado de sincronización entre los elementos  $i$  y  $j$ .

Supondremos una dinámica coevolutiva entre los estados de los elementos y las conexiones entre ellos. Es decir, los estados de los elementos cambian en el tiempo de acuerdo con la ecuación (1), mientras que las conexiones o acoplamientos entre los elementos se modifican según una relación entre esos estados, de manera que la estructura de conectividad del sistema también evoluciona en el tiempo.

La dinámica de reconexión o recableado que permite la coevolución del sistema se describe mediante siguiente algoritmo,

- 1) Partir de una distribución inicial aleatoria uniforme de los estados de los elementos  $x_0^i \in [-\infty, \infty]$  y de una red de conectividad inicial entre ellos.
- 2) Se elige un elemento  $i$ .
- 3) Se elige un elemento  $j_1 \in v_i$  tal que  $|x_n^i - x_n^{j_1}| = \max[d_{ij_1}(n)]$ .
- 4) Se elige un elemento  $j_2 \in v_i$ , tal que  $|x_n^i - x_n^{j_2}| = \min[d_{ij_2}(n)]$ .
- 5) Si  $\min[d_{ij_2}(n)] < \max[d_{ij_1}(n)]$ , entonces se cambian las conexiones tal que  $j_2 \in v_i$  y  $j_1 \in v_i$ .
- 6) Regrese a 2) y repita hasta que  $n = T$ , donde  $T$  es un número escogido suficientemente grande.

Hemos ejecutado el algoritmo anterior para distintos tipos de redes de conectividad inicial: una red aleatoria, una red unidimensional regular y una red de pequeño mundo. Para caracterizar las propiedades topológicas de la red emergente en este sistema en el tiempo, calculamos las siguientes cantidades:

- 1) El coeficiente de agrupamiento  $C_i$  para cada elemento  $i$ , el cual está dado por el cociente entre las conexiones existentes  $E_i$  entre sus  $v_i$  vecinos y el número total de posibles conexiones entre estos, el cual es  $N_i(N_i - 1)/2$  (Davidsen *et al.* 2002).

Entonces, el coeficiente de agrupamiento  $C$  de la red se define como el promedio de los coeficientes de agrupamiento de todos los nodos,

$$C = \langle C_i \rangle = \left\langle \frac{2E_i}{N_i(N_i - 1)} \right\rangle; \quad (3)$$

en otras palabras, el coeficiente de agrupamiento indica la fracción media de los vecinos  $v_i$  del nodo  $i$  que son vecinos entre sí.

2) La longitud característica de la red, la cual se define como el promedio de las distancias más cortas entre todos los pares de elementos de la red. El promedio de estas distancias al elemento  $i$  es:

$$l(i) = \langle l_{\min}(i, j) \rangle, \quad (4)$$

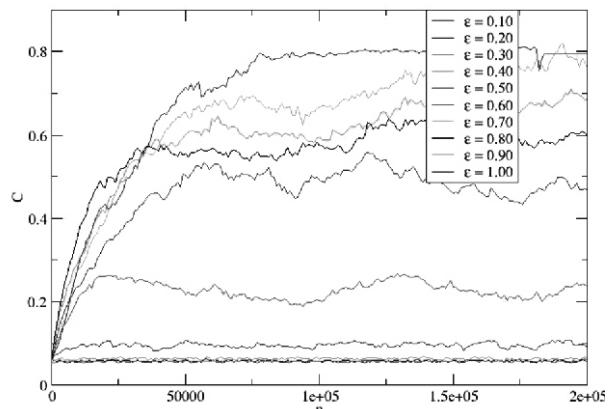
donde  $l_{\min}(i, j)$  representa la distancia más corta entre el elemento  $i$  y el elemento  $j$ . En consecuencia, la longitud característica de la red es promediada para todos los elementos  $i$ .

$$l_c = \langle l(i) \rangle, \quad (5)$$

## RESULTADOS

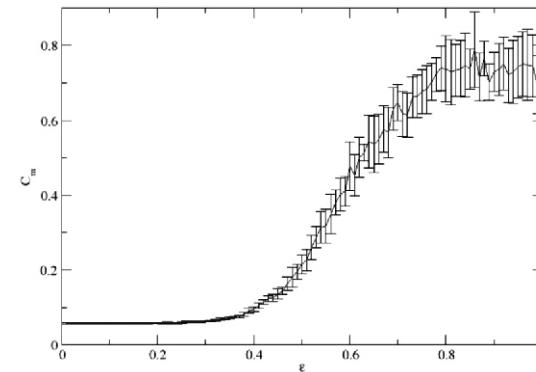
En la figura 1 se muestra el coeficiente de agrupamiento  $C$  en función del tiempo para una red inicial aleatoria, con distintos valores del parámetro de acoplamiento  $\epsilon$ . Los valores de  $C$  son pequeños al comienzo, como corresponde a una red aleatoria, y luego aumentan hasta alcanzar un valor estadísticamente estacionario que depende de  $\epsilon$ . Se encuentran valores de  $C$  altos en un intervalo del parámetro de acoplamiento que corresponden a valores típicos de redes de pequeño mundo. Hemos verificado que la longitud característica disminuye drásticamente en las primeras 1000 iteraciones y se mantiene pequeña en el tiempo, como corresponde a una red de pequeño mundo.

De la figura 1 se desprende que existe una dependencia de  $C$  con el parámetro de acoplamiento  $\epsilon$ . En particular, para  $\epsilon > 0,5$ , los indicadores  $C$  y  $l_c$  alcanzan valores característicos de una estructura de pequeño mundo. Para ver la dependencia de  $C$  con el parámetro de acoplamiento, dejamos estabilizar el sistema de manera que  $C$  alcance un estado estadísticamente estacionario, en el cual las fluctuaciones de  $C$  en tiempo sean suficientemente pequeñas. Entonces calculamos el valor promedio de  $C$  en el estado estacionario asintótico, el cual denominamos  $C_m$ .



**Figura 1. Coeficiente de agrupamiento  $C$  en función del tiempo  $n$  para una red inicial aleatoria, para distintos valores del acoplamiento, indicados.**

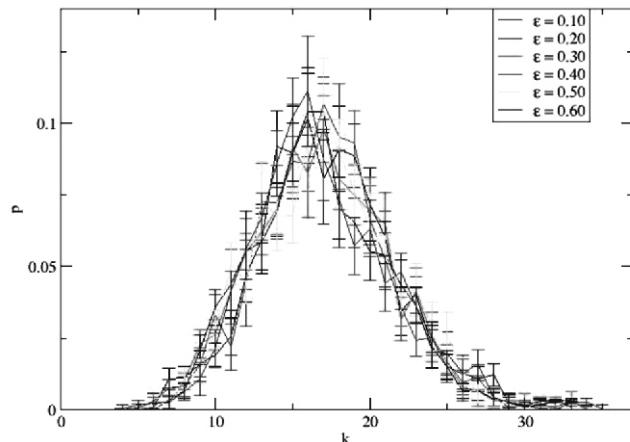
En la figura 2 se muestra el comportamiento de  $C_m$  en función de  $\epsilon$  para una red inicial aleatoria. Se observa una transición en el valor del coeficiente  $C_m$  para un valor crítico de  $\epsilon \approx 0,4$ . Para  $\epsilon < 0,4$ ,  $C$  tiene un valor muy pequeño, mientras que por encima de ese valor de  $\epsilon$ , el coeficiente  $C$  comienza a crecer hasta alcanzar valores grandes, característicos de estructuras de tipo pequeño mundo para  $\epsilon > 0,6$ . Para corroborar esto, calculamos la distribución de probabilidad del número de vecinos en la red  $p(v)$ , como se muestra en la figura 3. La distribución  $p(v)$  es de tipo gaussiana centrada alrededor de un valor medio del número de vecinos, lo cual es una propiedad característica de una red de pequeño mundo.



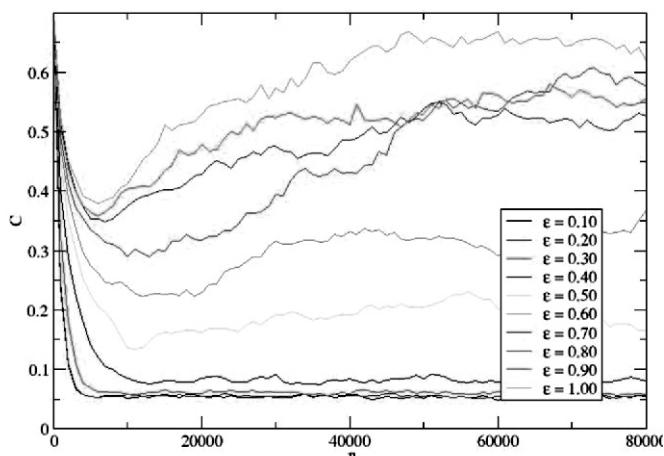
**Figura 2. Coeficiente de agrupamiento promedio  $C_m$  en función del parámetro de acoplamiento, para una red inicial aleatoria. El número total de iteraciones es  $T = 200000$  y el promedio se realizó sobre las últimas 1000 iteraciones. Las barras de error corresponden a la desviación estándar en cada punto.**

Hemos calculado el coeficiente de agrupamiento  $C$  en función del tiempo para una red inicial unidimensional regular, para distintos valores del acoplamiento  $\epsilon$ , como se muestra en la figura 4.

Similarmente, calculamos el coeficiente de agrupamiento  $C$  en función del tiempo para una red inicial de tipo pequeño mundo, para distintos valores del acoplamiento  $\epsilon$ , como se muestra en la figura 5.

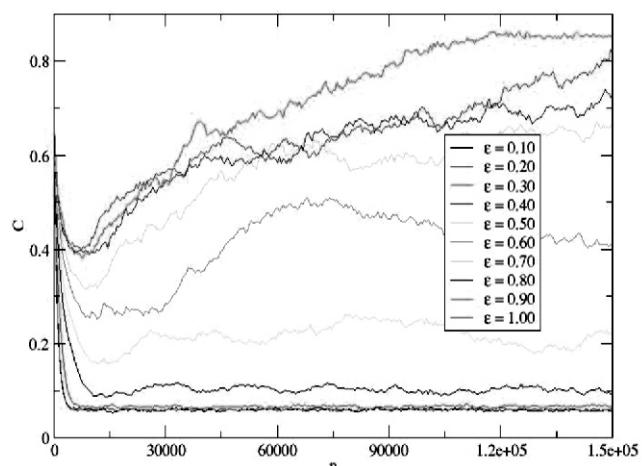


**Figura 3. Distribución de probabilidad  $p$  de vecinos para una red inicial aleatoria, para distintos valores de, indicados. El número de iteraciones es  $T = 200000$  y el promedio se realizó sobre las últimas 1000 iteraciones. Las barras de error corresponden a la desviación estándar en cada punto.**



**Figura 4. Coeficiente de agrupamiento  $C$  versus tiempo  $n$ , para una red inicial regular unidimensional, para distintos valores de, indicados. El número de conexiones iniciales es constante,  $v_i = 16$ ,  $\forall i$ , con 8 conexiones en cada lado.**

Nótese que, tanto para la red unidimensional regular y la red de pequeño mundo, los valores de  $C$  inicialmente son altos, como corresponde a estas redes, pero rápidamente decaen hasta valores característicos de redes aleatorias. Posteriormente, para un cierto rango de valores del acoplamiento, los valores de  $C$  alcanzan de nuevo valores típicos de una red de pequeño mundo. Esto indica que la evolución de la red de conectividad hacia una red de pequeño mundo debe pasar primero por una estructura de red aleatoria antes de convertirse en una estructura de pequeño mundo. Este camino evolutivo de la topología de la red es consecuencia de la dinámica de recableado basada en la búsqueda sincronizada que presenta este modelo.



**Figura 5. Coeficiente de agrupamiento  $C$  versus tiempo  $n$  para una red inicial de pequeño mundo, para distintos valores de indicados.**

## CONCLUSIONES

En conclusión, la principal contribución de este trabajo consiste en demostrar que, independientemente de la red de conectividad inicial subyacente, un sistema constituido por elementos caóticos interactivos evoluciona hacia una estructura de pequeño mundo, mientras que los estados de los elementos se auto-organizan conjuntamente con la red. Este es un fenómeno de coevolución de topología y dinámica, el cual se observa en una variedad de sistemas complejos en la naturaleza, como en las redes neuronales. Estructura y dinámica, por lo tanto, contribuyen a la flexibilidad y a la variabilidad, que son propiedades ubicuas en sistemas complejos. La conectividad de la red y la dinámica de los elementos coevolucionan para alcanzar un incremento en la eficiencia de la propagación de información en el sistema.

El mecanismo que permite la emergencia de una red de pequeño mundo en un sistema coevolutivo sujeto al algoritmo aquí descrito, es la condición de acoplamiento entre elementos que tienen valores de estado cercanos. En otras palabras, la búsqueda de sincronización entre los elementos de un sistema conduce a una estructura de conectividad de tipo pequeño mundo. Este mecanismo podría explicar el origen de muchas de las redes de pequeño mundo que se han descubierto.

### **AGRADECIMIENTOS**

Este trabajo ha sido apoyado por el Consejo de Desarrollo, Científico, Tecnológico y Humanístico de Universidad de Los Andes, Mérida, a través del proyecto C-1579-08-05-B.

### **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- DAVIDSEN, J.; EBEL, H. y BORNHOLDT, S. Emergence of a small world from local interactions: modeling acquaintance networks, *Phys. Rev. Lett.*, 88:128701. 2002.
- GONG, P. y VAN LEEUWEN, C. Evolution to a small-world network with chaotic units, *Europhys. Lett.*, 67:328-333. 2004.
- HOLME, P. y NEWMAN, M. Nonequilibrium phase transition in the coevolution of networks and opinions, *Phys. Rev. E*, 74:056108. 2006.
- KAWABE, T. y KONDO, Y. Fractal transformation of the one-dimensional chaos produced by logarithmic map, *Prog. Theor. Phys.* 85:759. 1991.
- NEWMAN, M.; BARABASI, A. y WATTS, D. *The Structure and Dynamics of Networks*, Princeton University Press. 2006.
- WATTS, J. y STROGATZ, H. Collective dynamics of small-world networks, *Nature (London)*, 393, 440. 1998.
- ZIMMERMANN, G.; EQUILUZ, M. y SAN MIGUEL, M. Coevolution of dynamical states and interactions in dynamic networks, *Phys. Rev. E*, 69:065102(R). 2004.

# INSTRUCCIONES PARA LOS AUTORES

## 1. GENERALES

- 1.1. La *Revista Científica UNET*, de la Universidad nacional Experimental del Táchira, es un órgano de publicación de artículos científicos originales e inéditos en las áreas científicas, humanísticas y tecnológicas.
- 1.2. La Revista Científica UNET se publicará periódicamente por lo menos en dos números y un volumen anual, y sus artículos podrán estar en los idiomas español o inglés.
- 1.3. Los originales no se podrán presentar posterior o simultáneamente a otra revista. Una vez recibido el material pasa a ser de exclusiva y definitiva propiedad de la *Revista Científica UNET*.
- 1.4. Los artículos deben ser enviados con una comunicación dirigida al Director de la *Revista Científica UNET*, en el que el autor responsable declarare la conformidad por parte de los coautores y que el artículo enviado no ha sido publicado previamente.
- 1.5. El Comité Editorial de la *Revista Científica UNET* al aceptar la publicación no se hace responsable del contenido expresado en el trabajo publicado. Se acusará recibo, cuando así se solicite.
- 1.6. Aquellos originales que no se acojan a las condiciones indicadas en los requisitos de presentación que se ofrece a continuación, o que por su contenido no constituya una contribución científica original, serán devueltos al autor.
- 1.7. Los artículos deben ser presentados a doble espacio, letra tipo Times New Roman, 12 puntos, con todas las páginas y líneas enumeradas. El documento incluye texto, figuras, tablas y referencias bibliográficas, sin exceder las 20 páginas. Debe ser enviado en formato digital, ya sea en archivo Word (.doc), Portable Document File (.pdf) o Latex (.txt) sin restricciones de seguridad, y las imágenes deben ser presentadas en archivo JPG, en resolución de 300 dpi. para su posterior edición a ser considerados por la revista. Una vez aceptado el artículo se le solicitará el arte final con mayor resolución.

## 2. REQUISITOS DE PRESENTACIÓN

- 2.1. Los artículos científicos deberán contener los elementos que a continuación se indican: Portada, Resumen, Palabras Clave, Abstract, Key Words, Introducción, Materiales y Método, Resultados, Discusión, Conclusiones, Agradecimiento y Referencias Bibliográficas.
- 2.2. Los artículos científicos deberán presentarse escritos a doble espacio (excepto: Resumen, Abstract, Agradecimiento leyendas de figuras y tablas, y Referencias Bibliográficas, que serán transcritas a un solo espacio), con los siguientes márgenes: 4 cm sobre el borde izquierdo; 3 cm sobre la derecha, 4 cm en el superior y 3 cm por el inferior; tamaño carta, sin correcciones y con enumeración consecutiva.
- 2.3. La portada ha de incluir los siguientes datos: **a.**- El título del trabajo breve y específico, expresado en español (máximo de 15 palabras). **b.**- Apellido(s) y nombre(s) del(los) autor(es). **c.**- Dirección institucional completa del (los) autor(es) indicando además correo electrónico. **d.**- Título del trabajo en inglés, con las mismas instrucciones del título en español. **e.** Resumen en español, en una sola cuartilla que no exceda un máximo de 250 palabras y seguidamente a un espacio de 3 a 5 palabras clave. **f.** Abstract (con iguales instrucciones que para el resumen en español), seguido por un espacio las palabras clave en inglés (Key Words). **G.** Título corto de encabezado, que no exceda las 5 palabras.
- 2.4. El encabezamiento de cada sección se escribirá en negritas en mayúsculas centradas en el texto.
- 2.5. Los encabezamientos subsiguientes y secciones se escribirán en negritas, en minúsculas (con la primera letra en mayúscula) y justificado a la izquierda.
- 2.6. Para las figuras, fotografías y gráficos debe usarse la denominación de **Figura**. Deben citarse apropiadamente en el texto, identificadas y enumeradas consecutivamente usando números arábigos. La leyenda debe ser concisa y descriptiva, debiendo colocarse debajo de la figura en negrita, tamaño 10 puntos.
- 2.7. Las tablas deberán estar enumeradas en forma consecutiva con número arábigo y se denominará **Tabla**. El encabezado debe ir sobre la tabla en negrita, tamaño 10 puntos. El autor podrá indicar en qué parte del texto aproximadamente deberán colocarse, pero nunca ser agrupadas al final del mismo.
- 2.8. Todas las tablas y figuras deberán ser referidas en el texto e ir acompañadas de leyendas explicativas, claras, Tabla (Ej. **Tabla 1. Valores promedios de ....**) y si es Figura (Ej. **Figura 3. Dispositivo empleado para la ....**).
- 2.9. Las tablas y gráficos deberán presentarse en Word. Los símbolos matemáticos deben ser muy claros y legibles. Los subíndices y suprínndices deben estar ubicados correctamente y las ecuaciones deben ser enumeradas en arábigo, colocadas entre paréntesis en el margen derecho. Las tablas configuradas en horizontal, deberán presentarse con la parte superior en el borde izquierdo, respetando los márgenes indicados en el apartado 2.2.
- 2.10. Las referencias bibliográficas deben ir en hojas separadas al final de cada trabajo, en forma consecutiva y ordenada alfabéticamente. En el texto debe citarse el apellido del autor y año [ Ej. (Perruolo, 2008) si no forma parte del texto; pero si forma parte de este sería por ejemplo, Casanova (1999)]. Cuando se trata de dos autores debe citarse (González & Rodríguez, 2000). Cuando son más de dos autores deberá citarse (Barrio *et al.*, 2004).
- 2.11. Cuando una cita consiste en varias fuentes, deberá citarse en orden cronológico separados por punto y coma, por ejemplo (Casanova, 1999; Gonzalez & Rodríguez, 2000; Barrio *et al.*, 2004; Perruolo, 2008).
- 2.12. En caso de presentarse una cita con distintos autores que coincidan en el apellido deberá colocar la inicial del nombre, por ejemplo (González L, 2001; González Z, 2001).
- 2.13. Para la elaboración de las referencias bibliográficas deberán seguirse las siguientes normas: **a.**- Si se trata de revista o publicaciones periódicas: apellido (s) de autor (es) inicial del nombre (s), Año, título del artículo, abreviatura de la revista, volumen (Número): páginas (inicial y final). **b.**- Si se trata de libros: Apellido(s) de autor(es) inicial del nombre(s), Año, título del libro, Edición, lugar de publicación (ciudad), casa editora, paginación. **c.**- Si se trata del capítulo de un libro: Apellido(s) de autor(es) inicial del nombre(s), Año, título del capítulo. En: apellido(s) e inicial del nombre(s), del editor del libro, título, edición, lugar de publicación, editora, página.
- 2.14. Las citas de fuentes electrónicas se reportan indicando: **a.**- Apellido (s) de autor (es) inicial del nombre (s). **b.**- Título del trabajo y **c.**- La denominación "Obtenido de Word Wide Web Site. <http://www.>, las siglas del remitente.
- 2.15. Enumere en el margen izquierdo del manuscrito todas las líneas del texto, iniciando la numeración en la primera línea del resumen.
- 2.16. Se recomienda a los autores considerar las normas internacionales de nomenclatura para cada materia, así como los símbolos, unidades y abreviaturas usadas internacionalmente.

## 3. DISPOSICIONES FINALES

- 3.1. Los trabajos deben ser enviados al: Editor Jefe de la *Revista Científica UNET*. Correo Electrónico: [runet@unet.edu.ve](mailto:runet@unet.edu.ve)
- 3.2. A los autores remitentes de los trabajos que cumplan con la normativa prevista en esta, se les notificará la recepción de los mismos.
- 3.3. Los artículos serán sometidos a arbitraje para su publicación. Se debe enviar por escrito de 3 a 5 posibles personas, conocedoras del tema a tratar respectivamente.
- 3.4. El Comité Editorial remitirá una correspondencia oficial de aceptación cuando los árbitros así lo determinen, indicándose la fecha de recepción, aceptación y ubicación relativa en la *Revista Científica UNET*.
- 3.5. En caso de correcciones, el Comité Editorial remitirá al primer autor una copia en formato digital por correo electrónico para las correcciones que fueren necesarias, teniéndose que ser devueltas en un lapso no mayor de 15 días hábiles.
- 3.6. El (los) autores recibirán 10 ejemplares de la revista en que se haya incluido su(s) artículo(s).

# RULES FOR THE AUTHORS

## 1. GENERALS

- 1.1 The UNET Scientific Magazine will consider for publication works related to the basic and applied sciences, the humanistic sciences and to all the branches of engineering.
- 1.2 Articles consisting of investigation results and upgrades, whenever they are unpublished, will be received, with a maximum of 20 pages.
- 1.3. The original versions in Spanish may be sent by national or foreign authors, the latter may be residents or not in Venezuela.
- 1.4. The originals cannot be sent to another magazine afterwards or simultaneously. Once received, the material becomes sole right and definite property of the UNET Scientific Magazine.
- 1.5. The text signed by more than one author is accepted with the presumption that all authors have revised and approved the original correspondent.
- 1.6. The Editorial Committee of the Scientific Magazine UNET when accepting the publication is not responsible for the content expressed in the published work, nor for the possible loss of the original, reason why the Committee advises the author to preserve a copy of the manuscript, both text and illustrations. Receipt will be acknowledged, when requested.
- 1.7. Originals that will not follow the above conditions, or the Instructions to follow, and that will not represent an original scientific contribution will be returned to the author.
- 1.8. The original must be accompanied by three readable copies and all the pages should be typed or printed, using some of the following word processors: Wordstar or Wordperfect. Written to a single column, with New Times Roman 12 points font, numbered. The number of pages must include text, figures, charts and bibliographical references. Also, it should include a 3½ disk, with the work to be published.

## 2. PRESENTATION REQUIREMENTS

- 2.1. The scientific articles to be published can contain the following elements: Cover, Abstract, Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion of Results, Conclusions, thank you notes and Bibliographical References.
- 2.2. The scientific articles should be written double spaced (except: the Abstract, thank you notes and Bibliographical References that will be written single spaced), with the following margins: 4 cm on the left border, 2.5 cm on the right, 4 cm on the top, 3 cm on the bottom; letter-sized page, single faced, without corrections and with serial numerations.
- 2.3. The cover must include the following information: a- The title of the work, brief and specific, written in Spanish (with a maximum of 15 words.). b- Last name, initial of the second last name and initial of the first name. Same for the other authors (if applicable), c- complete institutional address of the authors indicating postal address, fax, telephone and electronic mail.
- 2.4. A Spanish Summary with a maximum extension of 250 words in a single paragraph and subsequently to a space, key words in a quantity of 3 at 5.
- 2.5. The title of the work in English should consist of a faithful and exact translation of the title in Spanish, with the same instructions for this last one. Next, and to a space the Abstract (with the same instructions as for the title), the key words in a single paragraph and subsequently separated by a space (Key Words) in English.
- 2.6. The heading of each section will be written in boldfaces, uppercased and lower-cased centered in the text.
- 2.7. The headings of subsequent sections will be written boldfaced, in uppercase and lowercase, to the left of the text.
- 2.8. Figures, Photographs and Graphics should be designated as Figure.
- 2.9. Charts and figures will be referenced in the text and accompanied by explanatory legends, located at the top part for Charts (E.g. Chart 1. Mean Values of.....) and in the bottom if it is a Figure (E.g. Figure 3. Device used for the.....).

- 2.10. Charts and graphics will be presented in Word, Harvard Graphics or Excel, to a maximum size of 15x15 cm wide. The pictures will be in black and white with a maximum of 9.5 cm wide, printed in brilliant, well contrasted and clear paper. The pictures will be identified (for technical reasons do not write on the reverse of the pictures). In the case of microphotographs, point out the increase to which it has been taken.
- 2.11. Mathematical symbols should be very clear and readable. Sub-indexes and supra-indexes should be located correctly and the equations should be numbered with Arabic numbers, placed between parenthesis in the right margin.
- 2.12. Bibliographical references should go in separated pages at the end of each work, arranged in a sequenced form and alphabetically ordered. In the text, references should be cited as follows: author's last names and year (E.g. (Casanova, 1999), if the citation goes within the text, it should be cited as follows: For example: The consumption per cápita of honey in Táchira State detected by Casanova (1999) was of.....).
- 2.13. For the elaboration of bibliographical references the following norms should be followed:
  - a. - Magazines or periodic publications: author's last name (s), initial of first name (s), each author separated by coma, year, title of the article, abbreviation of the magazine's name, magazine's volume, number of pages of the article.
  - b. - Books: Author's last name, initial of first name(s), year, title of the book, Edition, publication place (city), publisher, and page number.
  - c. - Chapter of a book: Author's last name, initial of first name, year, title of the chapter. In: last name(s) of author(s), initial of the first name, editor of the book, title, edition, publication place, publisher and page.
- 2.14. Citation of electronic sources are reported as: a. - Last name(s) of authors, initial of the first name. b. - Title of the work and c. - Denomination "Obtained from the World Wide Web Site: <http://www...>, the sender's initials.
- 2.15. Citations such as "unpublished observations", "personal communication" and "work in press" (that are not in our printing), should not be included in the list of references.
- 2.16. Authors are recommended to consider the international rules of nomenclature as well as the symbols, units and abbreviations used internationally.

## 3. FINAL DISPOSITIONS

- 3.1. Works should be sent to: Chief editor of the Magazine. Address: Avda. Universidad. Paramillo. Apartado 436. Decanato de Investigación UNET, San Cristóbal, Táchira-Venezuela. Electronic address: web-site: <http://investigacion.unet.edu.ve> E-mail: [rcasanov@unet.edu.ve](mailto:rcasanov@unet.edu.ve), [wfonseca@unet.edu.ve](mailto:wfonseca@unet.edu.ve), [rcunet@unet.edu.ve](mailto:rcunet@unet.edu.ve)
- 3.2. Remittent authors of works that fulfill the requirements will be notified by official communication date of reception.
- 3.3. Articles will be subjected to arbitration for their publication.
- 3.4. Referees will receive, revise and remit the articles to the Editorial Committee with the respective observations.
- 3.5. The Editorial Committee will send official correspondence of acceptance when the referees determine this way, indicating the publication date and relative location in the Scientific Magazine UNET.
- 3.6. In case of corrections, the Editorial Committee will send to the first author a copy and the disk for the corrections necessary to be made. The author should return it within 15 working days.
- 3.7. The authors will receive a copy of the magazine in which their article is included, together with 10 separated papers of the published article.

# Revista Científica UNET

ISBN: 1316-869X11C / Depósito legal pp87-0343  
Revocit: RVR001 / FONACIT: 20006000001  
RIF: G-20004886-7 · NIT: 0436983034

## Formulario de suscripción / Subscription Form

### Marque las casillas apropiadas / Check all that apply

Deseo **renovar** mi suscripción (vea tarifas abajo) / I want to **renew** my subscription (see chart below).

Deseo **suscribirme** (vea tarifas abajo) / I want to **subscribe** (see chart below).

Deseo **canje** con la Revista / I want to **exchange** with Magazine \_\_\_\_\_

<b>Tarifa anual por suscripción (2 números) / Annual subscription rates (2 Issues)</b>	
<b>Región / Forma de pago</b>	<b>1 Año / 1 year</b>
República Bolivariana de Venezuela	<input type="checkbox"/> Bs. 20.000,00
América Latina y el Caribe / Latin America & Caribbean	<input type="checkbox"/> US\$ 20,00
EEUU, Canadá y otros países / U.S., Canada, and all other countries	<input type="checkbox"/> US\$ 25,00

Las tarifas incluyen el envío por servicio aéreo regular. / Above rates include regular airmail service.

### Forma de Pago / Payment Information.

Se adjunta cheque de gerencia a nombre de:

**Universidad Nacional Experimental del Táchira-Decanato de Investigación**

Bank Check or money order enclosed in US\$ and drawn against a U.S. Bank payable to:

**Universidad Nacional Experimental del Táchira-Decanato de Investigación**

\_\_\_\_\_

Firma (necesaria) / Signature (necessary)

#### Enviar a / To send a:

Nombres / Name: \_\_\_\_\_ Apellidos / Last: \_\_\_\_\_

Organización / Organization: \_\_\_\_\_

Dirección / Address: \_\_\_\_\_

Ciudad / City: \_\_\_\_\_ Estado / State: \_\_\_\_\_ País / Country: \_\_\_\_\_

Código postal / Postal (ZIP): \_\_\_\_\_ Telf./ Phone: \_\_\_\_\_ Fax: \_\_\_\_\_

E-mail: \_\_\_\_\_ @ \_\_\_\_\_ E-mail alterno / E-mail alternating: \_\_\_\_\_ @ \_\_\_\_\_

Fecha / Date: \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_ (dd/mm/aa / dd/mm/yy)

 Si desea más información/If it wishes more information: Telf./Phone (58-276-3532949); Fax:(58-276-3532454).

 E-mail: [rcientifica@unet.edu.ve](mailto:rcientifica@unet.edu.ve)

 Envíe su pedido y pago a: / Mail orders paid in US\$ to: **Director Revista Científica UNET. Decanato de Investigación UNET. Edif. 6(B) tercer nivel, UNET, Av. Universidad, Paramillo 5001, San Cristóbal, Edo. Táchira. Republica Bolivariana de Venezuela.**

## COMITÉ DE ARBITROS

José Pascual	Universidad de Malaga – España
Antonio Silva	Universidad Central de Venezuela
Jorge Castellanos	Universidad de Carabobo
Betty Chapeta	Universidad de los Andes – Táchira
Azael Contreras	Universidad de los Andes – Táchira
Marcelo Andrés Sarabia	Universidad Católica Boliviana San Pablo-Bolivia
Tahis Ferrer	Universidad del Zulia
Virginia Cabrera	Universidad Autónoma de Puebla-México
Dennis Morales	INIA Zulia
German Larrazabal	Universidad de Carabobo
Lilian Fuentes	INIA Mérida
Julio Cruz	Universidad Simón Bolívar
José Zapatero	Universidad de Malaga – España
Rosa Vera	Universidad Nacional Experimental del Táchira
Cesar contreras	Universidad Nacional Experimental del Táchira

# INDICE ACUMULADO



## TITULO DEL ARTICULO

Efectos de tratamientos químicos y físicos en la germinación de kudzu tropical. (*Pueraria phaselooides* Benth)

- Pérez, A.

Estudio de la *Fasciola hepatica* en el Estado Táchira, Venezuela. Incidencia y prevalencias en la zona sur del Estado Táchira.

- Perruolo, G.; Perdomo, E. y Silva, J.

Coleópteros Coprófagos y Necrófagos (*Coleoptera: Scarabaeidae*) del Estado Táchira, Venezuela.

- Havranek, D.

Utilización de la Cachaza líquida preservada en la alimentación de cerdos en crecimiento y acabado.

- Bautista, O.

Nuevo Tripanosoma de peces de agua cálidas en Venezuela. (*Protozoa kinetoplastida*).

- Perruolo, G.

Algunas consideraciones sobre Paja Cabezona o Maciega (*Paspalum virgatum* L.)

- Pérez, L.; Pacheco, J.

Catálogo de los Scarabaeidae (*Coleoptera*) Coprófagos y Necrófagos, del Estado Táchira, Venezuela.

- Blanco, J.

Diseño y Construcción de un tubo de Calor.

- Nieto, O. y Salcedo, R.

Ánálisis experimental de esfuerzos en una cámara de combustión de combustible sólido.

- Bortone, C.

Evaluación preliminar del factor "C" en la ecuación universal de pérdidas de suelo bajo diferentes prácticas de manejo en el cultivo del caffeto.

- Useche, R. y Méndez, J.

El Potasio en los suelos dedicados al cultivo de la caña de azúcar en el Valle de Ureña - San Antonio, Edo. Táchira.

- Gamboa, J.; Núñez, J.; Gamboa, M.

Estudio de la calidad de la miel de abeja comercializada en la Ciudad de San Cristóbal, Edo. Táchira, Venezuela.

- Casanova, R.

## Nº PAGINA

3

Respuesta del Corocillo *Cyperus rotundus* L. a la aplicación directa de glicofosfato sobre tubérculo.

- Pérez, L.

*Culicoides* (Diptera: Ceratopogonidae) del Estado Táchira, Venezuela. Parte I.

- Perruolo, G.

Leguminosas que incrementan el valor nutritivo de algunos pastizales del Estado Táchira.

- Vera, A.

Datos ecológicos para *Coloides castanea* (*Coleoptera: Scarabaeidae: Hybosoridae*).

- Havranek, D.

Catálogo de los Scarabaeidae (*Coleoptera*) Coprófagos y Necrófagos del Estado Táchira, Venezuela Parte II.

- Blanco, J.

Fraccionamiento del Azufre en algunos suelos pertenecientes al bosque seco montano bajo del Estado Táchira, Venezuela.

- Gamboa, J.; Chacón, L.; Gamboa, M.

Adaptación informacional en la abeja doméstica *Apis mellifera* L. (Hymenoptera: Apidae).

- Tapias, O.; Valderrama, N.

Eficiencia del riego de la caña de azúcar en el área Ureña - San Antonio.

- Torras, S.

Factibilidad para la instalación de una planta productora de carbón activado.

- Torres, A. y Zambrano, L.

Algunos Scarabaeinae neotropicales nuevos o pocos conocidos.

- Martínez, A.

Odanata del Estado Táchira.

- De Marmels, J.

Aplicación en edafología del paquete estadístico BMDP. 1: Transformación del Superfosfato triple en dos suelos del Estado Táchira.

- López, A.

82

## Nº PAGINA

3

17

21

31

39

49

55

65

77

85

91

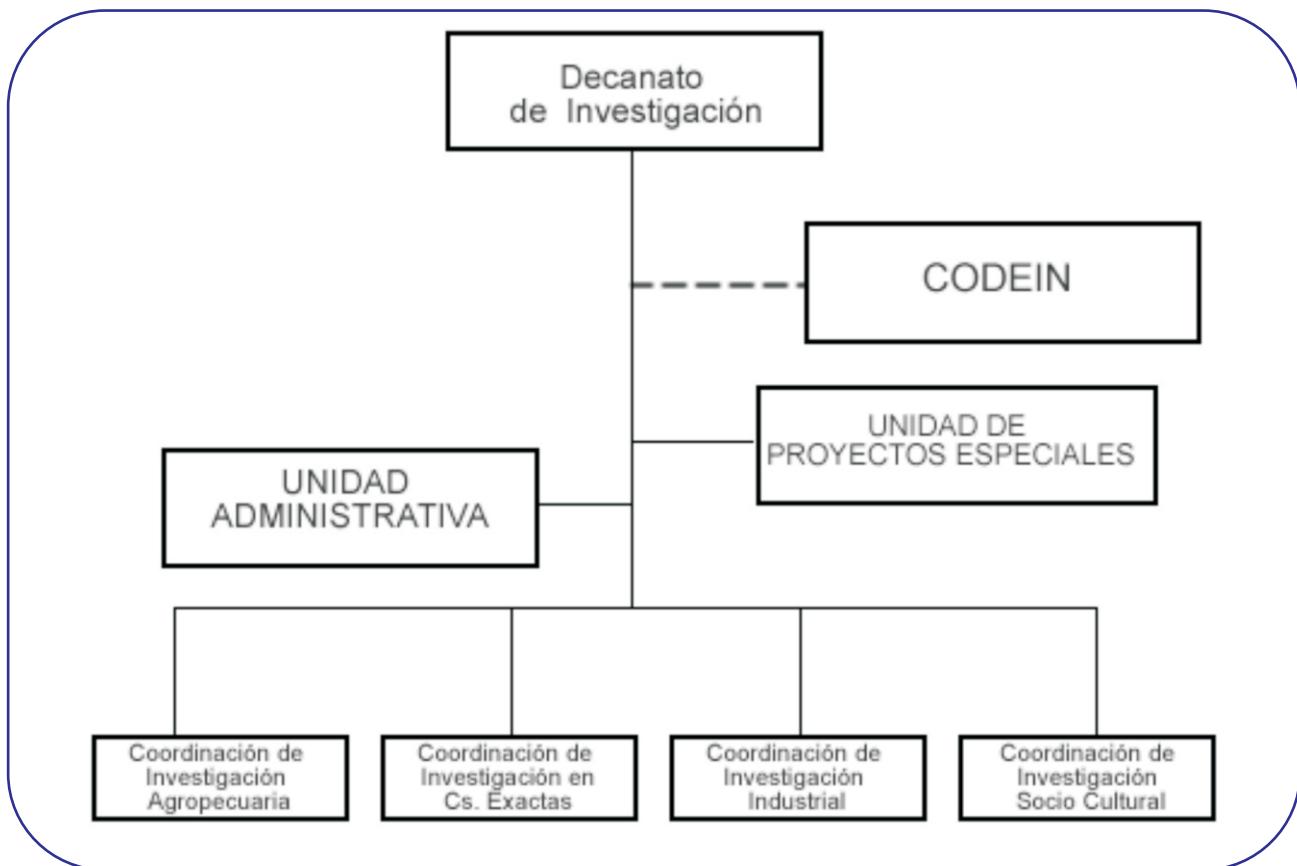
113

# Revista Científica UNET

República Bolivariana de Venezuela

VOL. N° 21(1):2009

ENERO-JUNIO, 2009



Aprobado en Consejo Universitario de Fecha 04 de Marzo 2008  
Sesion No. 10/2008

*Prohibida la reproducción total o parcial  
del contenido en esta Revista*

<http://investigacion.unet.edu.ve>  
Correo Electrónico: [rcunet@unet.edu.ve](mailto:rcunet@unet.edu.ve)

Revista Científica UNET  
Depósito legal p.p 87-0343  
ISSN: 1316-869X11C  
REVENCYT RVR001  
FONACIT Reg 2006000001  
LATINDEX CATALOGO

<b>SUMARIO</b>		<b>Página</b>
<b>EXACTAS</b>		
CAOS COLECTIVO EN REDES DE PEQUEÑO MUNDO González-Estévez, J.; Cosenza, M.		1
MODELO DE INTERCAMBIO ECONÓMICO EN UNA SOCIEDAD ESTRATIFICADA CON INTERACCIONES LOCALES Herrera, J.; Cosenza, M.; Tucci, K.		8
AUTO-ORGANIZACIÓN EN REDES AD-HOC Albornoz, J.		14
COEXISTENCIA DE TEMPERATURAS GRANULARES DIFERENTES EN UNA CAPA GRANULAR FLUIDIZADA Trujillo, L.; Roca J.; Sigalotti Di G. L.		27
ESTIMACIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL EN SERIES DE TIEMPO DE LA FRECUENCIA CARDÍACA FETAL Ortega, J.; Infante, S.; González, X.		35
OPTIMIZACIÓN DE LA CONECTIVIDAD DE REDES DE MAPAS ACOPLADOS MEDIANTE UN ALGORITMO GENÉTICO Estévez, R.; Tucci K.		46
EFFECTO DE LA DENSIDAD DE VEHÍCULOS DE TRANSPORTE PÚBLICO EN LA FLUIDEZ DEL TRÁFICO: UN MODELO AUTÓMATA CELULAR Márquez, J.		56
EMERGENCIA DE REDES DE PEQUEÑO MUNDO EN SISTEMAS COEVOLUTIVOS DE MAPAS CAÓTICOS ACOPLADOS Chipia, M.; Cosenza, M.		60
<b>SUMMARY</b>		<b>Page</b>
<b>EXACTAS</b>		
COLLECTIVE CHAOS ON SMALL-WORLD NETWORKS González-Estévez, J.; Cosenza, M.		1
A MODEL OF ECONOMIC EXCHANGE IN A STRATIFIED SOCIETY WITH LOCAL INTERACTIONS Herrera, J.; Cosenza, M.; Tucci, K.		8
SELF-ORGANIZATION IN AD-HOC NETWORKS Albornoz, J.		14
COEXISTENCE OF UNEQUAL GRANULAR TEMPERATURES IN A FLUIDIZED GRANULAR LAYER Trujillo, L.; Roca J.; Sigalotti Di G. L.		27
ESTIMATING FRACTAL DIMENSION IN TIME SERIES OF FETAL CARDIAC FREQUENCY Ortega, J.; Infante, S.; González, X.		35
OPTIMIZATION OF COUPLED MAP LATTICES CONNECTIVITY USING A GENETIC ALGORITHM Estévez, R.; Tucci K.		46
EFFECT OF THE DENSITY OF PUBLIC TRANSPORTATION VEHICLES IN TRAFFIC FLOW: A CELLULAR AUTOMATA MODEL Márquez, J.		56
EMERGENCE OF SMALL-WORLD NETWORKS IN COEVOLVING SYSTEMS OF COUPLED CHAOTIC MAPS Chipia, M.; Cosenza, M.		60